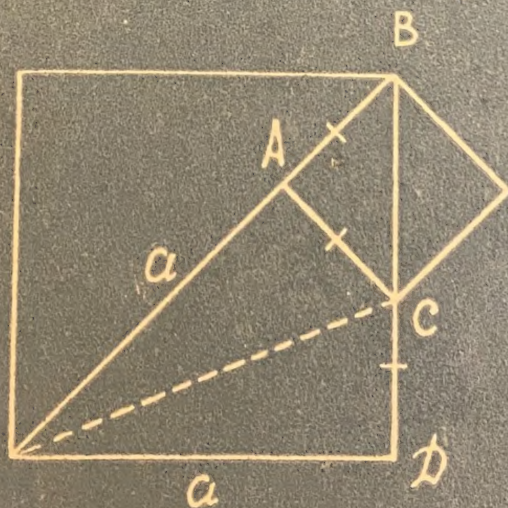


З.И. ХӘЛИЛОВ

**ИНСАНЛАР
ИНДИКИ РИЯЗИЙЯТА
НЕЧӘ КАЛИБ
ЧАТМЫШЛАР**



БАКЫ • УШАГКӘНЧНӘШР • 1955

З. И. ХƏЛИЛОВ

Физика-риязийят элмлəri доктору, профессор

51(09)
XSO

ИНСАНЛАР ИНДИКИ
РИАЗИЙЯТА НЕЧƏ КƏЛИБ
ЧАТМЫШЛАР

М. Ф. Ахундов адына
Азәрбайжан Респ. Олика
Үлүм ИТ. С. 112301

Азәрбайжан
Ушат вə Кəнчлэр Əдəбийяты Нəшрийяты
Бакы — 1955

56375

17/11

Бу китабчанын ясылмасында эсас мәгсәд кәнч охучуларымызы риязийятын мадди эсасларынын инкишаф йоллары илә вә онун айры-айры һиссәләринин мүндрәчәсилә, риязи фәнләрин техника, тәбиәт элмләри вә инсанын практики фәалийәти үчүн әһәмийәти илә таныш этмәкдән, инсанларын индики риязийята нечә кәлиб чатдыгларыны онлара көстөрмәкдән ибарәтдир.

Китабчада мүасир риязийят һиссәләринин һамасы һаггында данышылмыр. Чүнки онларын бәзиләри хүсуси һазырлыг тәләб әдир.

Китабчада риязийятын бир нечә һиссәләринин эсас проблемләри, онларын һәлли методлары вә һәр һиссәнин мүасир вәзийәти һаггында мәлумат верилир. Бу мәлумат еддииллик тәһсил һәчминдә һазырлығы олан охучуларын мәнимсәйә биләчәйи дәрәчәдә верилмишдир.

„Чанлы мүшәһидэдән мүчәrrэд тә-
фәккүрә вә ондан практика. *Һәгигәти*
дәрк әтмәйин, об'ектив реаллығы дәрк
әтмәйин диалектик йолу беләдир“,
(В. И. Л е н и н, Фәлсәфә дәфтәрләри,
1947, сәһ. 146—147)

Бүтүн башга элмэр кими, рия-
зийат да инсанларын эмәли эһтияч-
ларындан: торпаг сәһәләринин вә
габларын тутумуну өлчмәкдән, вах-
тын һесаблинамасындан вә механика-
дан эмәлә кәлмишдир.

Ф. ӘНКЕЛС

I. ИЛК РИЯЗИ АНЛАЙЫШЛАР

Ер үзәриндә инсанлар бир чох йүз мин илләр бундан
эввәл чанлыларын узун мүддәт инкишафы нәтижәсиндә тө-
рәнмишләр. Индики инсанлар да һәммин гәдим дөврдә яшаян
инсанларын енә дә узун мүддәт инкишафы нәтижәсиндә эмәлә
кәлмишләр.

Ибтидаи инсанлар вәһши идиләр. Онлар һейван кими
сүрү илә яшайырдылар.

Инсанлар кәзәрәк ем ахтарырдылар. Онлар дашдан, ағач-
дан вә сүмүкдән мүхтәлиф кобуд силаһлар гайырыб исти-
фадә эдир, һейванлары овламаг үчүн бир ердән дикәр ерә
көчүрдүләр.

Ибтидаи инсанлар нә һейвандарлыг, нә әкинчилик вә нә
дә әлдә әдилән әрзагдан ем һазырламағы билмирдиләр.

Бу илк дөврләрдә яшаян инсанларын мүәййән яшайыш
ери олмамышдыр. Чүнки онлар һәлә тикинти ишини бил-
мирдиләр. Одур ки, онлар һейван кими мешәләрдә, ағач-
ларда, мағараларда яшайырдылар.

Белә яшаян инсанларын һәяты һәмишә горху алтында
иди. Одур ки, яшамаг уғрунда мүбаризә инсанлары груп-
лашмаға, бирликдә ем вә мүвәггәти дүшәркә ери ахтармаға
мәчбур эдирди. Ибтидаи инсанын һәяты белә иди.

Инсанларын һәяты бир сәвиййәдә галмырды. Инсан чә-
миййәти чох яваш-яваш инкишаф эдирди. Истеһсал аләт-
ләри кетдикчә тәкмилләширди. Мүәййән дөврдә дашы яхшы
йонуб һамарламаг йолу илә бычаглар, ох учлары, балталар
гайырмаға башладылар. Сонра каманла ох атмағы, сапанла
даш тулламағы, узагдан ов этмәйи өйрәндиләр. Бундан баш-
га инсанлар килдән габ гайырмағы, һейванларын дәрисин-
дән истифадә этмәйи дә бачардылар. Онлар вулканлардан
вә я янан мешәләрдән од әлдә этдиләр. Сонралары исә өз-

лери дэ од төрөтмэйи өйрөндилэр. Ики ағач һиссәсини бир-биринә сүртәрәк вә я ики даш парчасыны бир-биринә вура-раг од һасил эдә билдиләр. Әмәк аләтлери дәйишдикчә инсанлар да дәйишир, онларын һәят үчүн лазым олан вәсаити тапмаг йоллары да дәйиширди. Бу дөврләрдә артыг инсанлар һейванлары рам этмәйи, балыг овламағы өйрәнирләр. Онлар, ибтидаи һейвандарлыға башлайырлар. Көчәри һәят кечирән инсанлар артыг мүййән торпагларда яшамаға башлайырлар.

Бир чох мин илләр кечдикдән сонра инсанлар ени, даһа йүксәк мәишәтә гәдәм гойдулар. Онлар артыг тәсадүфи емлә, вәһши от вә көкләрлә, һәмишә мүнәффеғийәтлә гуртармаян овла кифайәтләнә билмирдиләр. Инсанларын ем, палтар әлдә этмәйә, мәнзил гурмаға, аләт һазырламаға олан тәләбаты артыр. Бөйүк һейван сүрүләринин бәсләнмәси инсанлара сүд, эт, дәри вә сүмүк верирди. Инсан садә ер әкмәкдән даһа инкишаф этмиш әкинчилиһә кечир. Хыш вә котан ярадылыр вә ер шумунда һейванларын әмәйиндән истифадә эдилир.

Инсанын һәяты вә мәдәнийәти белә яранараг инкишаф эдир.

Мүййән дөврләрдә инсан чисимләри саймаға башлайыр, онда ов этдийи һейванларын, гушларын вә гайырдығы силаһларын сайыны билмәк әһтиячы доғур. Инсан артыг инкишаф этмишдир, онун үчүн чисимләри саймаг вә бир груп чисимләри башга груп чисимләрлә мугайисә этмәк лазым кәлир.

Илк дөврләрдә инсанларда чох вә аз анлайышы яраныр. Сонралар исә нә гәдәр чох, нә гәдәр аз анлайышы әмәлә кәлир.

Даһа сонралар сай просесиндә инсан конкрет чисимләрдән узаглашыр, онда әдәд анлайышы әмәлә кәлир: ики гушда, ики кечидә, ики ағачда олан үмумилик онларын ики дәнә олмасыдыр. Бу үмуми олан ики, әдәддир. Беләликлә әдәд анлайышы яраныр. Бу нөв илә үч, дөрд вә и. а. әдәдләр анлайышы яраныр.

Сай просесиндә тәбии олараг илк дәфә топлама әмәли яранмышдыр. Ов әдилән ики гуш үзәринә икинчи дәфә ов әдилән үч гуш әлавә эдилибдир. Бу заман ов әдилмиш гушларын һамысы сайылса нечә дәнә олар. Әлбәтдә, илк дөврләрдә гушларын һамысыны бир-биринә гарышдырыб тәзәдән сайырдылар. Сонралар исә узун мүддәт тәчрүбәнин вә бөйүк инкишафын нәтичәсиндә ики әдәди илә үч әдәдинин топланмасы нәтичәсиндә алынған беш әдәди гушларын сайыны көстәрир. Беләликлә илк риязийят яраныр. Инсанлар әдәд анлайы-

шына вә топлама әмәлине узун мүддәтли инкишафын нәтичәсиндә кәлиб чыхырлар.

Риязийят илк доғулушундан башлаяраг үмумилик хас-сәсини дашыйыр: тәбиәтдә олан чисимләр әдәдләрлә сайылыр, әдәдләрин топланмасы нәтичәсиндә алынған ени әдәдләр исә гарышдырылан вә яхуд бирликдә көтүрүлән чисимләрин сайыны верир.

Инсанлар узун мүддәтли тәчрүбә вә инкишаф нәтичәсиндә топлама әмәлинин хасәләрини өйрәнирләр. Истәр әввәл ики гушу, сонра исә үч гушу көтүр, яхуд әввәл үч гушу, сонра исә ики гушу көтүр, һәр ики һалда гушларын чәми бешдир; үч груп чисим варса, онлар һансы нөвбәдә көтүрүлүрсә көтүрүлсүн чәми әйнидир. Беләликлә чәмдә ердәйишмә вә групплашдырма гануну кәшф эдилир:

$$II + III = III + II,$$

$$(II + III) + I = II + (III + I).$$

Бурада ишләтдийимиз ишарәләр вә рәгәмләрин чох сонралар ярадылмасына бахмаяраг биз онлардан аңчаг фикримизи изаһ этмәк үчүн истифадә этдик.

Тәчрүбә вә инкишаф нәтичәсиндә инсан групплары вә гәбиләлери арасында мүбадилә башланыр. Йә'ни бир гәбиләдә артыг олан әрзаг вә һәят вәсаити башга гәбиләдә артыг олан башга әрзаг вә һәят вәсаитилә мүбадилә эдилир. Бу мүбадилә нәтичәсиндә мүййән дөврдә сайма просесинә вә топлама әмәлине бөйүк әһтияч төрәнир.

Әдәдлери көстәрмәк үчүн рәгәмләр ярадылмышдыр. Рәгәмләрин ярадылмасы исә сай системи илә бағлыдыр.

Инкишафын мүййән дөврүндә инсанлар сайы асанлашдырмаг үчүн гыса сайма үсулларыны кәшф этмишләр. Онлар чүт-чүт, он ики-он ики, ийирми-ийирми, алтмыш-алтмыш, вә и. а. саймағы өйрәнмишләр.

Һазырда инсанлар онлуг сай системиндән истифадә эдиләр.

Онлуг сай системиндә он рәгәм лазым олур:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

(*)

Бу он рәгәмин васитәсилә һәр бир әдәди көстәрмәк мүмкүндүр. Бу һагда охучу мүййән мәлумата маликдир. Билмәк лазымдыр ки, юхарыда көстәрилән рәгәмләр (нумерасия) бөйүк инкишаф нәтичәсиндә алынмышдыр.

(*) рэгэмлэр эдэбийятда эрэб рэгэмлэри адланьр. Эрэблэр рэгэмлэри биринчи дэфэ һиндлилэрдэн өйрәнмишлэр. Эрэб-лэрин ишлэтдийи:

1. Г Г Г { Δ 7 V Λ 9 .

рэгэмлэри авропалылар биринчи дэфэ VIII эсрдэ өйрәнмиш-лэр.

■ Сонралар бу рэгэмлэр мүхтәлиф дөврлэрдэ Авропада белә ишләдилмишдир:

Эрэбэлрин рэгэмлэри:

1 Г Г Г { Δ 7 V Λ 9 .

Авропада X эсрдэ:

1 Z { \$ U 4 V 7 9 0

Авропада XIV эсрдэ:

1 Z 3 X 7 6 7 8 9 0

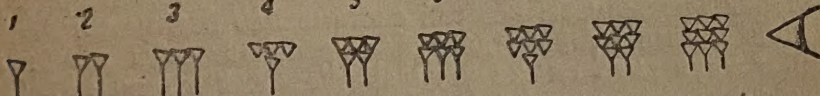
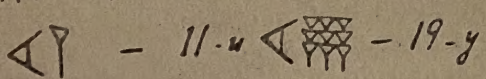
Мүасир дөврдэ:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Ромада исә:

I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X

кими ишләнилрди. Гәдимлэрдэ Бабилистанда ишләнилән рэгэмлэр белә иди:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10



көстәрир.

Сонралар инсанлар топламанын тәрсилә олан чыхма әмәлини, мүхтәсәр топлама әмәли олан вурма әмәлини, вурманын тәрсилә олан бөлмә әмәлини ишләдилрләр.

Инсанлар сайма просесилә бирликдә икинчи бир просеси дә ишләтмәйә башлайырлар. Бу да мәсафәлэри мүгайисә әтмәкдән, өлчмәкдән ибарәтдир.

Ерин бир нөгтәсилә дикәр нөгтәси арасындакы мәсафә нә гәдәрди? Илк дөврлэрдә йәгин ки, бу суала белә чаваб

верилир: о нөгтәләр арасындакы мәсафә ики күнлүк пияда йоддур, ярым күнлүк ат йолүдур. Бурада бир мәсафә дикәр мәсафә илә мүгайисә олунур. Ики дәринин һансындан даһа чох папаг олар? Бурада дәриләрин бөйүк вә кичик олмасы нәзәрә алынараг мүгайисә әдилмәлидир.

Өлчү просеси дә әдәд анлайышыны ярадыр.

Һәр ики просесдә илк дөврлэрдә ики, үч вә чох, сонралар ики, үч, дөрд, беш вә чох, даһа сонралар исә он вә и. а. инкишаф белә гайда илә давам әдир.

Сай просеси анчаг там әдәлләри верир. Өлчү просеси дәгигләшдикчә там әдәлләр артыг кифайәт әтмир. Одур ки, өлчү просеси бизи кәср әдәди анлайышына кәтириб чыхарыр. Бу дәридән үч папаг вә бир дә папағын ярысы чыхыр.

Даһа сонралар инсанын мәдәнийәти артыр, о гайыг һазырлайыр, бүрүнчдән силаһлар гайырыр, әвләр тикир, чайлар үзәрилә көрпүләр салыр, араба дүзәлдир. Бунлар һамысы һәм сай вә һәм дә өлчү просесинин дәгигләшмәсини тәләб әдир. Әввәлләр ярым, дөрддә бир кәср анлайышлары кифайәт әдирдисә, инди артыг даһа мүрәккәб кәсрлэрин ишләнмәсинә әһтияч ояныр.

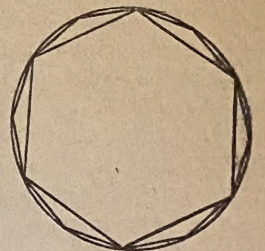
Сонралар бөйүк кәмиләрин гурулмасы, бөйүк биналарын тикилмәси, узун көрпүлэрин салынмасы, кәскин силаһларын һазырланмасы өлчү просесини даһа артыг инкишаф әтдирир. Беләликлә дә мүрәккәб кәсрләр алыныр.

Мәсәлән, әввәлләри даирә чеврәсинин узунлуғу, онун радиусунун 6 мислине бәрәбәр олмасы гәбул әдилирди. Сонралар бу кифайәт әтмир. Чеврәлэрин даһа дәгиг өлчүл-мәси лазым кәлир. Одур ки, чеврәни 12 ерә бөләрәк онун узунлуғуну вә са-һәсини даһа дәгиг өлчүрләр (шәкил 1). Лакин бу да кифайәт әтмир; просес да-вам әтдирилир. Нәһайәт бу нисбәтин мүәййән әдилмиш даһа дәгиг гиймәти 6,28 әдәди олдуғу әлдә әдилир.

Заман кечдикчә инсанлар кечә вахты сәһраларда вә яхуд ачыг дәнизлэрдә һәрәкәт әтдиклә вәзийәти тә'йин әтмәк үчүн улдузларын вәзийәтиндән истифадә әдилрләр. Бунунла әлагәдар олараг чох узаг мәсафәлэри өлчмәк лазым кәлирди.

Буна көрә дә дәгиг өлчмәк просесинә бөйүк әһтияч до-ғулурду.

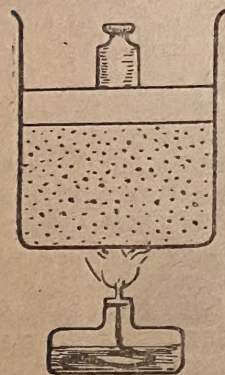
Өлчү просесинин дәгиглийинин артырылмасы әһтиячы артдыгча өлчү васитәлэри вә риязи методлар да инкишаф әтдирилир. Бунунла әлагәдар олараг һәндәсә элми яраныр. Илк һәндәсәнин әсаслары илә охучу орта мәктәбдә таныш олмушдур.



Шәкил 1

Даһа сонралар инсанлар табият һадисәләрини тәчрүби истифадә мәгсәдилә өйрәнмәйә башлайыр; мүхтәлиф һадисәләр арасындакы әләгәләр тапмаг истәйир. Бунунла әләгәдар олараг бир чох риязи мәсәләләр ортая чыхыр. Бу мәсәләләрин һәлли үчүн бир чох бөйүк ишләр көрүлүр.

Һадисәнин бириси ярандыгда мүәййән дикәр һадисәнин әмәлә кәлмәси тәмин әдилир. Бу һалда дейирләр ки, бу ики һадисә арасында *асылылыг* вардыр. Бу асылылыглары тәйин этмәк үчүн тәчрүби вә нәзәри методлар яраныр.



Шәкил 2

Мәсәлән, габдакы газы гыздырдыгда көрүрүк ки, о газын тәзийги артыр (шәкил 2). Демәк газын температурасы илә тәзийги арасында мүәййән асылылыг вардыр. Бу кими асылылыглары өйрәнмәк үчүн мүәййән риязи методлар ярадылыр.

Бурада ики нөв мәсәлә гоюлур:

- 1) һадисә бүтөв мәлүм икән онун һиссәсинин ганунийәтини тәйин этмәк;
- 2) һадисәнин кичик һиссәсиндәки ганунийәт мәлүм икән ону бүтөв тәйин этмәк.

Бу мәсәләләр XVII әсрдән башлаяраг риязийятын гаршысына гоюлур. Һәммин мәсәләләрин һәлли һаггында китабчанын 5-чи параграфында мүәййән мәлүмат вериләчәкдир.

Тәдгиг олунан һадисәләр мүрәккәбләшдикчә вә бунунла әләгәдар олан риязи проблемләрин һәчми бөйүдүкчә *символларын*—гыса ишарәләрин ишләнилмәси мәсәләси ортая чыхыр. Мүасир риязийятда *символлардан* чох кениш истифадә әдилир.

Мүасир әлм вә техника риязийятын гаршысында бир сыра ени мәсәләләр гоймушдур. Бөйүк сүр'әтли нәглият васитәләринин, тәйярәләрин, паравозларын, кәмиләрин ярадылмасы, ени әнержи мәнбәләри, мәсәлән, атом әнержисинин истифадә әдилмәси, йүксәк вә тәһһиз олунмуш биналарын тикилмәси, табият һадисәләринин даһа дәриндән өйрәнилмәси, инсанларын әһтиячларынын даһа чох тәмин әдилмәси мәсәләләр бир чох риязи мәсәләләрин һәллини тәләб этмәкдәдир. Бунун нә дәрәчәдә лазым олдуғуну яхшы дүшүнмәк үчүн һавадан чох ағыр олан тәйярәнин учушуну мисал кәтирмәк олар. 30—40 сәрнишин тутан вә бөйүк йүк көтүрән тәйярәләрин бөйүк сүр'әтлә хәтәрсиз һәрәкәти үчүн онун ганадалары, гуйруғу, пропеллери, матору вә бир чох чиһазлары дәгиг һесаблинамалыдыр. Бу һесаблинамалар бир чох мүрәккәб риязи мәсәләләрин һәллини тәләб әдир. Мүасир риязийятын

әсас мәсәләләри вә онун һәлл әдилмәсинин методлары һагда исә кәләчәк параграфларда данышылачакдыр.

2. ӘДӘД АНЛАЙЫШЫНЫН ИНКИШАФЫ

Кечән параграфда сай просесинин табии әдәдләри, йә'ни мүсбәт там әдәдләри, өлчү просесинин исә кәср әдәдләри яратдығыны көрдүк.

Тәкчә сай вә өлчү просесләри дейил, риязийятдакы әмәлләр дә ени әдәд анлайышлары ярадыр, мәсәлән, *һәр бир тарс әмәл ени табиятли әдәдләрин мейдана кәлмәсинә сәбәб олур*.

Чыхма әмәли бизи сыфыра вә мәнфи әдәдләрә кәтириб чыхарыр. Чүнки табии әдәдләр даирәсиндә

2—2

2—3

кими чыхмалар мүмкүн дейил. Бу фәргләр я мүстәсна олараг гәбул олунмалы, яхуд да онлары ифадә әдә билән ени әдәдләр гәбул әдилмәлидир. Әлбәт ки, бурада икинчи йол илә кедилмәлидир. Чүнки бу йол инкишафа доғру кедән йолдур. Бу мәгсәдлә дә сыфыра бир әдәд кими бахмышлар вә һәм дә риязийята мәнфи әдәдләр дахил этмишләр.

Сыфыр, бәрәбәр әдәдләрин фәргини, мәнфи әдәдләр исә чыхыланын азаланан бөйүк олдуғу һаллардакы фәрги ифадә әдир.

Ади әдәдләри мәнфи әдәдләрдән фәргләндирмәк үчүн онлара мүсбәт әдәдләр ады верилмишдир.

Беләликлә вахтилә мәлүм олан табии әдәдләр чохлуғу:

1, 2, 3, ... (1)

кенишләндирилир вә

... —2, —1, 0, +1, +2, ... (2)

әдәдләр чохлуғу яраныр. Бу алынан әдәдләр чохлуғу там әдәдләр чохлуғу адланыр.

Кенишләндирилмиш (2) чохлуғунун әһәмиийәти орасындадыр ки, онлар үчүн чыхма әмәли һәмишә мүмкүндүр. Һалбуки, чыхма әмәли (1) чохлуғун дахилиндә дедиимиз кими, һәмишә мүмкүн дейилдир.

Сонралар мәнфи әдәдләр бөйүк мүвәффәгийәтлә физикада вә техникада ишләнилир. Мәсәлән, мәнфи (сыфырдан ашағы) вә мүсбәт (сыфырдан юхары) температуралар, мәнфи (кечмиш) вә мүсбәт (кәләчәк) заманлар, мәнфи (башлангыч

нөгтәсиндән кери) вә мүсбәт (башлангыч нөгтәсиндән ирәли) мәсәфәләр.

Инди биз вурма әмәлинин тәрси олан бөлмә әмәлини көтүрәк. Тәбии әдәдләр даирәсиндә бу әмәлдән һәмишә истифадә этмәк мүмкүн дейилдир. Мәсәлән,

$$2:3$$

Бурада да я бу кими бөлмә мүстәсна әдилмәлидир, яхуд да ени әдәдләр—кәсрләр риязийята дахил әдилмәлидир. Элм икинчи йолла кетмишдир.

Дедийимиз инкишафын нәтичәсиндә (2) чохлуғу даһа кениш олан

$$\pm \frac{m}{n} \quad (3)$$

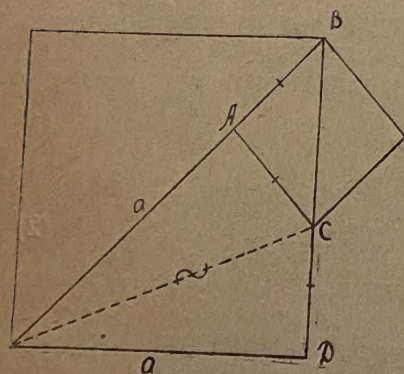
$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

чохлауна давам этдирилик. Инди артыг әдәдләр чохлуғу сыфырдан, мәнфи вә мүсбәт, там вә кәср әдәдләрдән ибарәтдир.

Ону да гейд этмәк лазымдыр ки, кәср һәм өлчү просесиндән, һәм дә бөлмә әмәлинин нәтичәсиндә алыныр.

Мүәййән дөврдә алимләр белә бир һадисәйә дә тәсадүф этмишдиләр; бә'зән бир чисми дикәр чисим илә мүгайисә этдикдә (өлчдүкдә) көрүрдүләр ки, нәтичәдә нә там вә нә дә кәср әдәд алыныр.

Мисал үчүн истәнилән квадратын диагонали илә тәрәфини көтүрәк. Квадратын тәрәфини онун диагонали үзәринә гойсаг, галан AB парчасы $AC = CD$ парчасына бәрабәр олдуғундан енә дә ени квадратын тәрәфи олан AB парчасы илә онун диагонали олан BC —нин мүгайисәсинә кәлирик. (шәкил 3). Чүнки OC хәттинин көмәйи илә ики бәрабәр OAC вә ODC дүзбучаглы үчбучаглар әлдә әдилир. Бурада өлчү просесинин сонсуз давам этдийини көрүрүк. Демәк



Шәкил 3

квадратын диагонали илә тәрәфини мүгайисә этдикдә нә там әдәд вә нә дә кәср әдәд алыныр.

Сыфыр, мүсбәт вә мәнфи кәср вә там олмаян әдәдләрә риязийята *иррасионал* әдәдләр дейилир.

Икинчи бир мисал көтүрәк. Исбат әдәк ки, $\sqrt{2}$ иррасионал әдәддир. Буну исбат этмәк үчүн онун тәрсини көтүрәк: фәрз әдәк ки, $\sqrt{2}$ кәсрдир:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad (1)$$

бурада p вә q ортаг вуруғу олмаян там әдәдләрди, йә'ни $\frac{p}{q}$ кәсри ихтисар олуна билмир. (1) бәрабәрлийини квадрата йүксәлтсәк,

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \quad (2)$$

алынар, йә'ни

$$p^2 = 2q^2$$

Бурадан алашылыр ки, p чүт әдәддир*, йә'ни

$$p = 2p'$$

кими языла биләр. p —нин бу гиймәтини (2)—дә еринә гойсаг,

$$q^2 = 2p'^2$$

алынар. Бурадан да алашылыр ки, q чүт әдәддир. Демәк p вә q әдәдләринин ортаг вуруғу вардыр, бу вурут 2—дир. Бу исә фәрзиййәмизин доғру олмадығыны исбат әдир. Бурадан исә $\sqrt{2}$ әдәдинин иррасионал әдәд олдуғу алыныр.

Иррасионал олмаян әдәдләрә *расионал* әдәдләр дейилир, йә'ни сыфыр, мүсбәт вә мәнфи, там вә я кәср әдәдләрә *расионал* әдәдләр дейилир.

Исбат олунмушдур ки, иррасионал әдәдләр *расионал* әдәдләрдән олдуғча чохдур.

Расионал вә иррасионал әдәдләрә бирликдә *һәгиги* әдәдләр дейилир.

Гүввәтә йүксәлтмәнин тәрси олан көкалма әмәли дә риязийята иррасионал әдәдләри дахил этмишдир:

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{7}, \dots$$

Бундан башга риязийята көкалма әмәли *хәяли* әдәдләри дә дахил этмишләр:

$$\sqrt{-2}, \sqrt{-4},$$

Бу әдәдләрә *хәяли* адыны кечмишдә вермишләр. Чүнки һеч бир һәгиги әдәдин квадраты мәнфи ола билмәз.

* Чүнки тәк әдәдин квадраты тәкдир: $(2k+1)^2 = 4k(k+1) + 1$.

Сонралар мэлүм олмушдур ки, хэяли эдэдлэрин риязийятда чох бөйүк эһәмийәти вардыр. Одур ки, хэяли эдэдләр мүасир риязийятда кениш сурәтдә тәтбиг олунур. Эдәд анлайышы даима инкишаф этмәкдәдир. Һазырда риязийят элминдә кениш истифада олунан ени эдэдләри охучу бу китабчадан илк мэлүматы алдыгдан сонра хүсуси эдәбийят васитәсилә өйрәнә биләр.

3. ЭДЭДЛӘР НЭЗӘРИЙӘСИ

Эдэдлэрин хассәләринин вә дашыдығы дахили ганунларын өйрәнилмәси инди дә давам эдир. Эдэдлэрин өйрәнилмәсилә алагәдар олараг бир чох риязи фәннләр әмәлә кәлмишдир. Мәсәлән, там эдэдләри өйрәнән айрыча риязи фәнн вардыр. Бу фәнн *эдәдләр нәзәрийәси* адланыр. Бу фәннин әсас мәсәләләриндән бири дә там эдэдлэрин тәркибини өйрәнмәкдир. Бу саһәдә чох мәшһур олан проблемләрдән бириси һаггында данышаг.

Петербург әлмләр академиясынын үзвү олан алим Голдбах йохламалар нәтичәсиндә белә бир гәрәра кәлмишди ки, *һәр бир там эдәди үч әсли эдәдин чәми кими кәстәрмәк олар*.^{*} Бу һөкмү Голдбах өзү исбат эдә билмәмишди. 1742-чи илдә о, мәшһур рус алими Эйлерә яздығы мәктубунда гейд этмишди ки, *бешдән бөйүк һәр бир там эдәди үч әсли эдәдин чәми кими кәстәрмәк олар*.

Эйлер дә бу теореманы исбат эдә билмәмишди. Нә Голдбахын вә Эйлерин дөврүндә яшаян алимләр вә нә дә XIX әсрин риязийятчылары бу мәсәләнин һәлли үчүн һеч бир шей әлдә эдә билмәмишләр.

Мәшһур алман алими Кантор бу һөкмү 2-дән 1000-ә гәдәр олан эдэдләрдә йохламышдыр. Обри исә бу иши 2.000-ә гәдәр давам этдирмишдир. Бу эдэдләр даирәсиндә Голдбах һөкмүнүн доғру олдуғу айдын олмушдур.

1911-чи илдә Меле исбат этмишдир ки, 14 дәнә эдәд мүстәсна олмаг шәртилә 9.000.000-а гәдәр олан эдэдләр үчүн Голдбахын һөкмү доғрудур. Бундан артыг һеч бир аддым атан олмамышды.

1912-чи илдә мәшһур риязийятчы Ландау риязийят конгресиндә өз фикрини сөйләйәрәк демишдир ки, мүасир риязийяттын күчү илә бу проблем һәлл олуна билмәз.

1923-чү илдә инкилис риязийятчыларындан Һарди вә Литлвуд Голдбах проблеминин һәлли саһәсиндә ени нәтичәләр әлдә этдиләр.

* Өзүндән вә ваһидән башга һеч бир там эдәдә бөлүнмәйән там эдәдләрә *әсли* эдэдләр дейилир. Мәсәлән: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19,...

1930-чу илдә совет риязийятчысы Шнирелман (1905—1938) бу саһәдә бөйүк дәйишиклик яратды.

Шнирелман исбат этди ки, һәр бир тәбии эдәди, сайы мүәйән S -дән артыг олмаян әсли эдэдлэрин чәми кими кәстәрмәк олар. S эдәди о вахт мэлүм дейил иди. Бу S эдәдинә „Шнирелман сабити“ ады верилди. Демәк инди Голдбах проблеми белә дейилә биләр: *Шнирелман сабити үчә барабәрдир*.

Сонралары бир чох риязийятчылар Шнирелманын методуну инкишаф этдирәрәк $S=67$ олдуғуну кәстәрдиләр.

Шнирелманын бу аддымы риязийят элминдәки ән чидди вә бөйүк аддымлардандыр.

1937-чи илдә әлм әләминдә бөйүк бир һадисә баш верди. Совет алими акад. И. М. Виноградов Голдбах проблемини демәк олар ки, тамамилә һәлл этди: *кафи бөйүк эдэдләр үчүн Голдбахын һөкмү доғрудур*.

1939-чу илдә Совет риязийятчысы К. Г. Бороздкин кәстәрди ки,

$$41,96$$

e

e

e

($e=2,7182...$) эдәдиндән бөйүк олан эдэдләр үчүн Голдбахын һөкмү доғрудур. Бороздкинин бу эдәди чох бөйүк эдәддир.

Инди исә проблем Бороздкин эдәдини азалтмагдан ибарәтдир.

Әкәр бу эдәд 2.000—дән аз олса Обринин йохламаларына кәрә Голдбах проблеми тамамилә мүсбәт һәлл эдилмиш олар.

Биз Голдбах проблеми һаггында бурада мэлүмат вермәкдә әлбәт ки, онун бир чох чәһәтдән эһәмийәтли олмасыны нәзәрә алырыг. Эйни заманда биз бу проблемин совет риязийятчылары тәрәфиндән һәлл эдилмәсини дә хүсуси гейд этмәк истәйирик.

Эдэдләр нәзәрийәси һазырда инкишаф этмәкдә давам эдир.

4. ТӘНЛИКЛӘР

Биз билирик ки, һәр бир һесаб вә я чәбр әмәлинин тәрси вардыр: топламанын тәрси чыхма, вурманын тәрси бөлмә, гүввәтә йүксәлтмәнин тәрси көкалма әмәлидир. Бу тәрс әмәллэрин һәр бириси риязийята ени эдэдләр дахил әдибдир. Инди биз мүәйән әмәллэрин һейәтинә бахаг:

$$x^3 + 5x - 4.$$

Бу эмәлләр һей'әтини шәрти олараг А эмәли адландыраг.

Бурада x -ин һәр гиймәти верилдикдә А эмәлинин нәтижәсиндә алынган әдәди тә'йин этмәк олар.

Мәсәлән, $x=2$ оlanda А эмәлинин нәтижәси 14 олар.

Инди биз тәрс эмәлә бахаг: фәрз әдәк ки, А эмәлинин нәтижәси мә'лумдур, уйгун x -ин гиймәти исә ахтарылыр. Мәсәлән, фәрз әдәк ки, А эмәлинин нәтижәси 2 дир. Айдындыр ки, бу һалда x -ин уйгун гиймәтләриндән бириси дә $x=1$ ола биләр. Бурада А эмәлинин тәрс дедикдә буну баша дүшмәлийик:

$$x^3+5x-4=2 \quad (1)$$

шәртини өдәйән x нечәдир? Бурада (1) ифадәси тәнлик адландыр. Демәк тәнлик һәлли тәрс эмәлдир.

Тәнликләр мұхтәлиф ола биләр: бир дәрәчәли

$$x+5=6,$$

ики дәрәчәли

$$x^2-5x+6=0$$

вә и. а.

Риязийятын вә башга әлмләрин бир чох мәсәләләри бизи тәнликләрин һәллине кәтирир.

Тәнликләрин һәлли мәсәләси мұһүм нәзәри вә тәчрүбә әһәмийәтә малик олдуғундан бу саһәдә бир чох ишләр көрүлмүшдүр.

Мәктәб чәбр курсундан мә'лумдур ки, бир дәрәчәли вә ики дәрәчәли тәнликләрин һәлли (көку) тәнлийин әмсаллары вәситәсилә ифадә олуна билир.

Мәсәлән, ики дәрәчәли тәнлийи көтүрәк:

$$ax^2+bx+c=0.$$

Мә'лумдур ки, бу тәнлийин көкләри

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

формуласы илә тә'йин олунур. Бурада һәлли тапмаг үчүн әмсаллар үзәриндә сонлу мигдарда әмәл апармаг лазым кәлдийини көрүрүк.

Тәнликләрә вә онларын вәситәсилә мәсәләләр һәлдинә илк дәфә шәрг алимләринин ишләриндә тәсадүф әдилир (Мисир папируслары, өзбәк риязийятысы Мәһәммәд Әлхәрәзми вә башгалары). Биринчи вә икинчи дәрәчәли тәнликләрин һәлли чохдан мә'лум иди. Үч дәрәчәли тәнликләри

биринчи дәфә XVI әсрдә италян алимләри Тарталя вә Кардано һәлл этмишдир. Бунлар

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

тәнлийи үчүн белә бир формула тә'йин этмишләр:

$$x = -\frac{b}{3a} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \mp \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

бурада

$$p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2},$$

$$q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}$$

дыр.

Италян алими Феррари дөрд дәрәчәли тәнлийин һәллине үч дәрәчәли тәнлийин һәллине кәтирмишдир.

Беләликлә XVI әсрдә дөрд дәрәчәйә гәдәр олан тәнликләрин көкләринин тәнлийин әмсаллары илә сонлу мигдарда әмәлләр вәситәсилә ифадә олундуғуну көрүрүк.

XVI әсрдән башлаяраг XIX әсрин әввәлләринә гәдәр бир чох риязийятчылар беш вә йүксәк дәрәчәли тәнликләрин һәлли илә мәшғул олмағларына бахмаяраг һеч бир нәтижәйә кәлә билмәмишләр.

XIX әсрин әввәлләриндә риязийятчылар белә бир проблемин һәллине ортая атдылар: дәрәчәси 4-дән йүксәк олан һәр бир тәнлийин көкү вармыдыр?

Бу суала биринчи дәфә франсыз алими Даламбер вә алман алими Гаусс чаваб вермишдир. Онлар кәстәрмишләр ки, һәр бир $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ шәклиндә олан тәнлийин һәлли вардыр, бу һәлл я һәгиги әдәд, я хәяли әдәд, яхуд да һәгиги илә хәяли әдәдләрин чәминдән (комплекс әдәддән) ибарәтдир.

Мәсәлән, $x^2+1=0$ тәнлийинин һәгиги һәлли йохдур. Чүнки һәгиги әдәдин квадраты мүсбәт вә я да сыфыр олдуғундан онун мүсбәт вәһидлә чәми сыфыр ола билмәз. Бу тәнлийин һәлли хәялидир: $x=\pm i$. Бурада i әлә әдәддир ки, онун квадраты мәнфи вәһиддир: $i^2=-1$.

Бу теореманын исбат әдилмәси илә риязийятчылар көкүн варлығы һаггындакы шүбһәдән чыхдылар.

Һәмин варлыг һаггындакы теореманын исбатындан сонра алимләр йүксәк дәрәчәли тәнликләрин һәлли илә даһа чүрәтлә мәшғул олмаға башладылар. Әдилән чәһдләр вә апарылан ишләр узун мүддәт нәтижәсиз галды.

М. Ф. А. ...
Азәрбајҹан Республикасы
Үләнмәт ...

Бу проблеми франсыз риязийятчысы Галуа (1811—1832) тамамилэ башга методла һәлл этмәйә башлады. Онын методу ени принципләр үзәриндә гурулмушду. Галуа өз әсәрини бөйүк франсыз академикләринә тәгдим этмишди. Лакин Галуа һеч бир чаваб ала билмәмишди.

Галуа 21 яшында икән реаксион тәшкилат тәрәфиндән дуәлдә өлдүрүлмүшдүр. О, дуәлә кетмәйә һазырлашаркән достуна яздығы мәктубунда хаһиш этмишди ки, онун әлми нәтичәләри чох әһәмийәтли олдуғундан һәмин нәтичәләри башга алимләрә, мәсәлән, Гаусса көстәрсинләр.

Бу ики тәрәfli фачиәдән 14 ил кечир. Нәһайәт Галуа-нын әсәрләри мәшһур франсыз алими Лиувиллин әлиһә дүшүр. Биринчи дәфә онлары Лиувилл анлая билмишди. Лиувилл бир нечә мәгаләсиндә Галуанын фикир вә методларыны дәрин шәрһ этмишдир.

Лиувиллин бу мәгаләләриндән сонра бүтүн дүня Галуа-нын күчүнү вә онун әлмдәки бөйүк хидмәтини көрдү.

Норвеч алими Абел (1802—1849) Галуанын ишләринә истинад әдәрәк биринчи дәфә белә бир теореманы исбат этди: *дәрәҗәси дөрддән йүксәк олан үмуми тәнликләрин көкләрини о тәнлийин әмсаллары илә сонлу мигдарда чәбри әмәлләр васитәсилә ифадә этмәк олмаз.*

Галуанын ишләри вә онун нәтичәси олан бу теорема риязийят әлминин ән бөйүк наилийәтләриндәндир.

Галуанын тәдгигләри чәбрдә вә үмумийәтләр риязийятда ени саһәләр ачды. Мүасир риязийятын бир чох һиссәләринин инкишафы Галуанын бу ишләринин нәтичәсиндә мүмкүн олмушдур.

Риязийятын бу саһәсинин ән ени вә характерик чәһәти ади әмәлләрин үмумиләшдирилмәсиндәдир. Бурада әмәл, әдәдләрдән фәргләнән истәнилән об'ектләр үчүн үмумиләшдирилир. Бунунла да ади чәбрдән кәнара чыхан үмуми чәбр—*али чәбр* яраныр.

Мүасир чәбрин бу һиссәләри һаггында китабчада данышмаг мүмкүн олмадығындан биз бунунла кифайәтләнирик. Али мәктәб курсунда бу һагда мәлумат верилир.

Бурада мейдана чыхан характерик риязи проблемләрә охучунун нәзәрини чәлб этмәк истәйирик.

Риязийятда һәр бир мәсәлә гоюлараг, онун һәлл әдилмәси лазым кәлдикдә, үч үмуми характерик проблем мейдана чыхыр:

- I. Мәсәләнин һәллинин варлығы,
- II. Мәсәләнин һәллинин еканәлийи,
- III. Һәллин тапылмасы.

Бә'зән гоюлмуш мәсәләнин һәлл әдилмәси чәтин олдуғундан һәллин варлығыны габагчадан билмәк лазым кәлир.

Чүнки гоюлмуш мәсәләнин һәлли бә'зән олмая да биләр. Мәсәлән:

$$\begin{aligned} x + y &= 1, \\ 2x + 2y &= 4 \end{aligned} \quad (1)$$

системинин һәлли йохдур*. Доғрудан да фәрз әдәк ки, $x=a, y=b$ системин һәллидир. Бу һалда

$$\begin{aligned} a + b &= 1, \\ 2a + 2b &= 4 \end{aligned}$$

олмалыдыр. Бурадан биринчи бәрабәрлийи 2-йә вуруб, икинчи бәрабәрликдән тәрәф тәрәфә чыхсаг,

$$0=2$$

алынар. Бу исә ола билмәз. Демәк (1) системин һәллинин варлығы фәрзийәси доғру дейилдир, йәни (1) системинин һәлли йохдур.

Одур ки, һәр бир гоюлмуш мәсәләнин һәлли үчүн, онун варлығынын габагчадан билинмәси проблеминин чох бөйүк әһәмийәти вардыр.

Икинчи проблем һәллин еканәлийи, йә'ни гоюлмуш мәсәләнин һәлләринин сайыны билмәк проблемидир.

Бу проблемин әһәмийәти айдындыр. Бә'зән бу проблемин принципал әһәмийәти олур. Мәсәлән, мүйәйән физики һадисәнин тәлгиги риязи мәсәләйә кәтирилдикдә әввәлдән һадисәни төрәдән шәртләрин һамысынын нәзәрә алынмасынын йохланылмасы лазым кәлир, йә'ни нәзәрә алынған шәртләрин һей'әти һадисәнин яранмасыны тәмин әдә билirmi суалы ортая чыхыр.

Үчүнчү проблем исә биринчи проблемдән чох фәрглидир. Бурада сөз һәллин фактик тапылмасы һаггында кедир. Бә'зән гоюлмуш мәсәлә һәллинин варлығы мәлум олдуғуна бахмаяраг, онун фактик тапылмасы чох бөйүк чәтинлик төрәдир.

Мәсәлән, Гауссун теоремасына көрә

$$x^5 + 1,01x^4 + 1,375x^3 + 1,037x^2 + 1,2x + 1 = 0$$

тәнлийинин һәлли вардыр. Лакин бу һәллин фактик тапылмасы мүйәйән методларын ишләнилмәсини тәләб әдир вә бу тәнлийин һәлл әдилмәси мүйәйән чәтинликләрә бағлыдыр.

* Гауссун теоремасы бир мәчһулла бир тәнлийә аиддир.

5. БҮТӨВӨ КӨРӨ НИССЭНИ, НИССЭЙЭ КӨРӨ БҮТӨВҮ ТЭЙН ЭТМЭК

Мүнтээм хадисэлэр о хадисэлэрэ дейилр ки, орада хадисэнин бэрэбэр заманлара, яхуд үмүмийэтлэ эйни шэрайтэ уйгун хиссэлэри эйни олсун.

Хадисэлэр мүнтээм олсалар онлары дөрд һеса́б эмэлэри илэ өйрөнмөк олар.

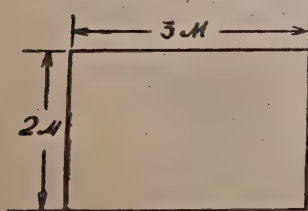
Мәсәлән, фәрз эдәк ки, чисим мүнтээм (бэрэбэр сүр'әтли) олараг 20 санийэдә 160 см йол кедир, чисмин сүр'әти нә гәдәрди́р, йә'ни бир санийэдә бу чисим нә гәдәр йол кедир. Айдындыр ки, ахтарылан сүр'әт

$$v = \frac{160 \text{ см}}{20 \text{ сан}} = 8 \frac{\text{см}}{\text{сан}}$$

олур. Демәк мәсәлэ бөлмә эмәли илэ һәлл олунур.

Фигура 4-чү шәкилдәки кими дүзбучаглыдыр.

Онун саһәси



Шәкил 4

$$S = 2 \text{ м} \cdot 3 \text{ м} = 6 \text{ м}^2$$

олар. Бурада дүзбучаглынын саһәсинин тапылмасы мәсәлэсүрмә (топлама) эмәли илэ һәлл олунур.

Инди биз фәрз эдәк ки, сәрбәст дүшән чисмин сүр'әтини тапмаг лазымдыр вә я 5-чи шәкилдә көстәрилән әйри фигуранын саһәсини тапмаг лазымдыр.

Бу мәсәлэләри артыг әввәлки методларла һәлл этмәк олмаз. Чүнки сәрбәст дүшән чисим бэрэбәр сүр'әтли һәрәкәт этмир; Галилейә көрә сәрбәст дүшән чисим биринчи санийэдә 5 м. икинчи санийэдә 15 м. үчүнчү санийэдә 25 м. йол кедир. Айдындыр ки, бурада һәрәкәт һәр ан дәйишир.

Икинчи мәсәлэдә биз әйри хәтли фигуранын саһәсини тапмалыйыг. Бурада даһа юхарыдакы чәмләмә методу ярамаз. Чүнки верилмиш фигураны сонлу сайда дүзбучаглылара вә я трапесиялара яхуд да үчбучаглара чевирмәк мүмкүн дейил.

Бу мәсәлэләри вә буна охшар мәсәлэләри һәлл этмәк үчүн ени методларын ярадылмасы лазым кәлир.

Мәсәлә А. Мүнтээм һәрәкәт этмәйән чисмин сүр'әтини тә'йин этмәк (Нютонун мәсәләси). Асан олмаг үчүн

һәрәкәти дүзхәтли фәрз эдәк. Тутаг ки, һәмин һәрәкәтдә чисим А нөгтәсиндән В нөгтәсинә көчмүшдүр (шәкил 6).



Шәкил 6

Әкәр АВ-нин S узунлуғуну, сәрф олунан t замана бөлсәк:

$$v = \frac{S}{t},$$

v эдәди бизә анчаг „орта сүр'әти“ верәр, йә'ни дейә биләрик ки, әкәр чисим v сүр'әтилә бэрэбәр сүр'әтли һәрәкәт этсә t заманында S гәдәр йол кедәр. Айдындыр ки, йолун бир хиссәси олан $S_1 = CD$ -ни көтүрсәк вә бу йолун кедилмәсиндә t_1 заманы сәрф олунубса

$$v_1 = \frac{S_1}{t_1}$$

чисмин CD-дәки орта сүр'әти олар. Лакин CD-дә дә һәр ердә сүр'әт эйни вә v_1 дейилдир. Чүнки бу хиссәдә дә һәрәкәт дәйишилир.

Одур ки, Нютон гоюлан мәсәләйә белә янашыр: C нөгтәсини гейд әдир; сонра t_1 нә гәдәр кичик олса, CD-нин узунлуғу да бир о гәдәр кичик олар вә бу кичик заманда (яхуд мәсафәдә) һәрәкәт аз дәйишиләр. Биз бу кичик заманда һәрәкәти тәгрибән мүнтээм фәрз эдә биләрик. Заман нә гәдәр аз олса, һәрәкәтин дәйишмәси дә аз олар.

Белиликлә биз һәрәкәти мүййән мигдарда кичик хиссәләрә бөлүрүк вә һәр хиссәдә орта сүр'әти тапыб һәрәкәти тәгрибән тәзә һәрәкәтлә, йә'ни хиссә-хиссә мүнтээм һәрәкәтлә әвәз әдирик.

Бурада тәбии белә бир суал мейдана чыхыр: бу хиссәләри нә бойда көтүрмәк лазымдыр? Бу суала мүййән чаваб вермәк мүмкүн дейил. Чүнки бу хиссәләрин бою тәләб олунан дәгигликдән асылыдыр. Нә гәдәр дәгиглик чох олса, йә'ни нә гәдәр верилән һәрәкәтлә тәртиб олунан хиссә-хиссә мүнтээм һәрәкәтин яхын олмасы лазым кәлсә, о гәдәр дә о хиссәләр кичик олмалыдыр.

Нютон бу гейри-мүййәнлийи арадан галдырмаг үчүн илк әввәл ән кичик заман вә мәсафә, йә'ни заманын, мәсафәнин атомуну ахтарырды.

Лакин сонралар мә'лум олду ки, белә янашмаг доғру дейилдир. Чүнки һәм заман, һәм дә мәсафә сонсуз олараг бөлүнә билирләр. Одур ки, нә заманын, нә дә мәсафәнин атому һаггында данышмаг олмаз.

Даһа сонралар мәшһур франсыз алыми Коши бу мәсәләни белә һәлл әдир. Әкәр әлә бир t_1 -дән асылы олмаян вә $\frac{S_1}{t_1}$ әдәдиндән истәнилән гәдәр аз фәргләнән v_c әдәди варса, һәмин v_c әдәдинә һәрәкәтин C нөгтәсиндәки сүр'әти дейилир.

Бурада биз „истәнилән гәдәр аз фәргләнсин“ ифадәсини айдынлашдыраг. Истәнилән гәдәр аз фәргләнмәни белә дүшүнүрүк: һансы бир кичик ε әдәди көтүрүрүксә көтүрәк бу әдәдә гаршы әлә t_1^0 әдәди вардыр ки, $t_1 < t_1^0$ олдуғда

$$\left| v_c - \frac{S_1}{t_1} \right| < \varepsilon$$

олур.

Бурада көрүрүк ки, артыг v_c көтүрүлән һиссәләрдән асылы дейилдир: о һәрәкәти анчаг C нөгтәсиндә тә'йин әдир, белә ки, әкәр чисим C нөгтәсиндән башлаяраг v_c сүр'әти илә һәрәкәт этсә тәгрибән

$$S_1 = v_c t_1$$

олар. Әлбәт ки, бурада t_1 нә гәдәр аз олса, бу бәрәбәрлийин хәтәсы да аз олар. v_c -йә ани сүр'әт дейилир.

Беләликлә биз ики анлайышла таныш олмуш олуруг: ени сүр'әт вә лимит просеси.

Демәк гейри-мүнтәзәм һәрәкәтин анчаг һәр андакы сүр'әтиндән данышмаг олар.

v_c -нин тә'рифиндә юхарыда тәсадүф этдийимиз просесә исә лимит просеси дейилир. Гыса олараг лимит просеси беләдир: t_1 азалдыгча $\frac{S_1}{t_1}$ кәмийәти дәйишә-дәйишә v_c кәмийәтинә яхынлашыр.

Ани сүр'әт анлайышынын әлмдә бөйүк әһәмийәти вардыр. Бу анлайыш Нютонун кәшф этдийи әлми анлайышлардан ән әһәмийәтдилериндәндир.

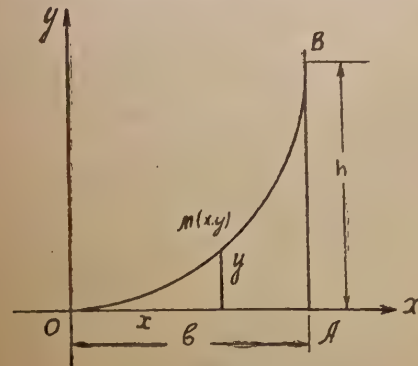
Лимит просеси исә риязийят әлминдә ән әсас просесләрдәндир. Бунун әһәмийәти техниканын вә физиканын бир чох мәсәләләринин һәллиндә ойнадығы бөйүк ролла тә'йин әдилер.

Демәк гейри-мүнтәзәм һадисәләрин тәдгигиндә ани сүр'әт вә лимит просеси мүһүм рол ойнайырлар.

Мәсәлә В. OAB әйри хәтли үчбучагын саһәсини тә'йин этмәли (шәкил 7) (Архимедин мәсәләси); бурада $y = ax^2$ олдуғу нәзәрә алынмалыдыр.

Архимед бу мәсәләни белә һәлл этмишдир: о, OA парчасыны n бәрәбәр һиссәйә бөлүр вә бөлкү нөгтәләриндән

AB -йә параллел дүз хәтләр кечирир. Сонра һәр әйри хәтли трапесияны 8-чи шәкилдә көстәрилмиш дүзбучаглы илә әвәз әдир. Бу дүзбучаглыларын саһәләрини тә'йин әдир вә онлары чәмләйир. Бу чәм верилмиш OAB фигурасынын тәгриби саһәсидир. Айдындыр ки, бурада алынған чәм OAB фигурасынын артыглыгы илә саһәсинә бәрәбәрдир.



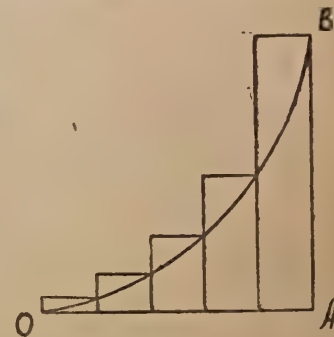
Шәкил 7

9-чу шәкилдәки кими көтүрәк уйғун чәм OAB фигурасынын азлыгы илә саһәсинә бәрәбәр олар. 8-чи шәкилдәки дүзбучаглыларын саһәләрини уйғун олараг s_1, s_2, \dots, s_n илә ишарә әдәк. Айдындыр ки, дедийимиз чәм белә тә'йин олар:

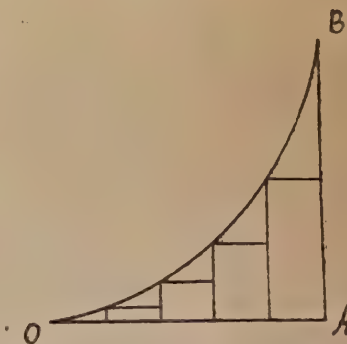
$$S_n = s_1 + s_2 + \dots + s_n$$

вә дедийимиз кими

$$\text{саһә } OAB < S_n.$$



Шәкил 8



Шәкил 9

Әкәр n -и сонсуз артырсаг S_n азала-азала OAB фигурасынын саһәсинә яхынлашар, n нә гәдәр бөйүк көтүрүлсә S_n дә о гәдәр OAB фигурасынын саһәсинә яхын олар.

Буну нәзәрә алараг, дүзбучаглыларын саһәләрини тә'йин әдәк:

$$s_1 = \frac{b}{n} \cdot a \left(\frac{b}{n} \right)^2,$$

$$s_2 = \frac{b}{n} \cdot a \left(\frac{2b}{n} \right)^2,$$

$$\dots$$

$$s_n = \frac{b}{n} \cdot a \left(\frac{nb}{n} \right)^2;$$

нәтижәдә

$$S_n = \frac{ab^3}{n^3} (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) \quad (1)$$

формуласы әлдә эдилір. Бу формула-истәнилән n үчүн S_n ин гиймәтини верир. Бу формуланын нөгсаны бурададыр ки, n артдыгча мө'тәризәләрдәки һәдләрин сайы да артыр.

Одур ки, Архимед белә бир формула тапмышдыр:

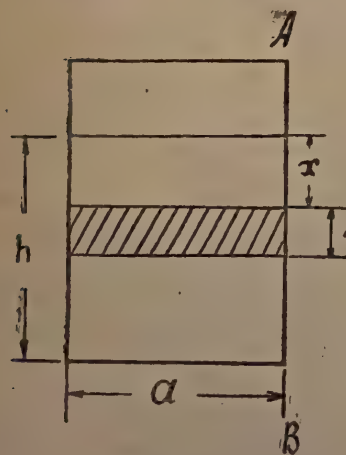
$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(йохлайын!).

Бу формулая әсасән (1) формуласыны

$$S_n = \frac{ab^3}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{ab^3}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

шәклиндә яза биләрик. Бурадан исә n чох бөйүдүкчә S_n азала-азала



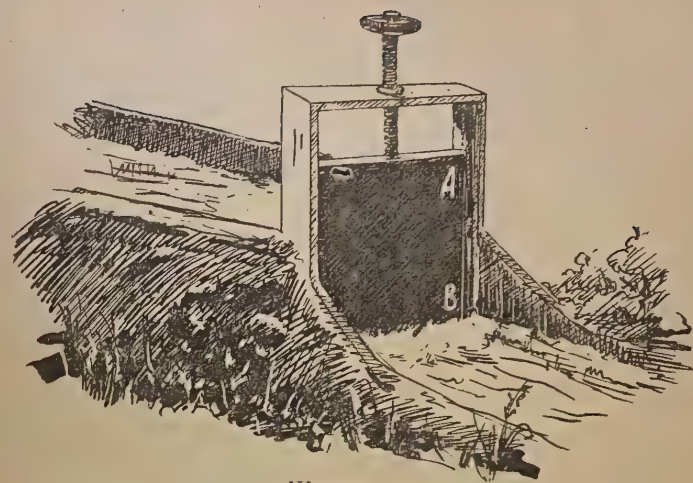
Шәкил 10

$$S = \frac{bh}{3} \quad (2)$$

гиймәтинә яхынлашдығыны көрүрүк ($h = ab^2$, 7-чи шәклә бах). Демәк OAB фигурасынын саһәси (2) формуласы васитәсилә тә'йин олунур.

Биз бурада да лимит просесиндән истифадә этдик: һәр бир истәнилән кичик ε әдәдинә гаршы элә n_0 вардыр ки, $n > n_0$ оlanda

$$\left| \frac{ab^3}{3} - S_n \right| < \varepsilon$$



Шәкил 11

6. СОНСУЗ КИЧИЛӘНЛӘР АНАЛИЗИ

Биз кечән параграфдакы A вә B мәсәләләрини һәлл этдикдә *дәйишән кәмийәтләр, сонсуз кичилән кәмийәтләр* (A мәсәләсиндә S_1 мәсафәси, t_1 заманы; B мәсәләсиндә кичилән саһә), *сонсуз бөйүян кәмийәтләр* (бөлкүләрин сайы) кими аңлайышлара тәсадүф этдик.

Һәмийн мәсәләләри һәлл этдикдә ени әмәлләрә тәсадүф этдик: ики сонсуз кичилән кәмийәт нисбәтинин лимитини тә'йин әтмәк (A мәсәләсиндә), мигдары сонсуз артан сонсуз кичиләнләрин чәминин лимитини тапмак (B мәсәләсиндә).

Дедийимиз аңлайышлардан вә әмәлләрдән истифадә әдәрәк A вә B кими мәсәләләрин һәлли илә мәшғул олан риязийятын һиссәсинә *сонсуз кичиләнләр анализи* дейилир. Сонсуз кичиләнләр анализи XVII әсрдә Нютон вә Лейбнис тәрәфиндән ярадылмышдыр. Сонралары о XVIII—XIX әсрләрдә бөйүк риязийятчылар тәрәфиндән инкишаф әтдирилмишдир. Сонсуз кичиләнләр анализи һазырда да инкишаф әтдирилир. Бу саһәдә совет риязийятчыларынын ишләри дүня әдәбийятында ән көркәмли ер тутур.

Сонсуз кичиләнләр анализинин биринчи типли мәсәләләри тәдгиг әдән һиссәсинә *дифференциал һесабы*, икинчи типли мәсәләләри тәдгиг әдән һиссәсинә исә *интеграл һесабы* дейилир. Дифференциал латынча фәрг, интеграл исә бүтөв демәкдир.

Сонсуз кичиләнләр анализи муәсир техниканын вә физиканын әсас тәдгиг методларындандыр.

Фикримизи бир даһа изаһ этмәк үчүн тәтбиги әһәмийәти олан садә бир мәсәләни һәллини кәстәрәк.

Мәсәлә. Каналда h йүксәклийиндә су вардыр. Бу суюн гаршысыны сахлаян A B шлюзуна тә'сир эдән гүввәни тә'йин этмәк лазымдыр. (шәкил 11).

Бурада һадисә гейри-мүнтәзәмдир: суюн мүхтәлиф дәринликләрдә тәйиги мүхтәлифдир, дәринлик артдыгча тәйиги дә артыр. Даһа дәгиг олараг десәк, x дәринлийиндә тәйиги γx дыр. Бурада γ суюн хусуси чәкисисидир ки, ону ваһид кәтүрмәк олар.

Мәсәләни һәлл этмәк үчүн әввәлки гайдая кәрә h йүксәклийини n бәрәбәр һиссәйә бөләк, онда һәр золағын эни $\frac{h}{n}$, узунлуғу исә a олар (шәкил 10).

Инди һәр золагдакы тәйиги сабит кәтүрсәк, йә'ни һадисәни һәр золагда мүнтәзәм фәрз әтсәк, золагларын һамысына тә'сир эдән гүввә ашағыдакы чәм илә тә'йин олунар:

$$F_n = \gamma \frac{h}{n} \cdot a \frac{h}{n} + \gamma \frac{2h}{n} \cdot a \frac{h}{n} + \dots + \gamma \frac{nh}{n} \cdot a \frac{h}{n}.$$

Енә дә F_n ахтардығымыз гүввәйә бәрәбәр дейилдир. Чүнки золагларын эни нә гәдәр кичик олурса олсун, онларда тәйигини яйылмасы мүнтәзәм вә сабит дейилдир. Одур ки, биз n —и сонсуз артырыб F_n -нин лимитини тә'йин этмәлийик. Һәммин мәсәләдә бу лимити тапмаг чәтин дейилдир. Доғрудан да

$$F_n = \frac{\gamma ah^2}{n^2} (1 + 2 + \dots + n)$$

олдуғу айдындыр. Мә'лумдур ки,

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{(1+n)n}{2}$$

формуласы доғрудур (йохлайын!). Бу һалда

$$F_n = \frac{\gamma ah^2}{n^2} \cdot \frac{(1+n)n}{2} = \frac{\gamma ah^2}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

алыныр, n артанда $\frac{1}{n}$ кичиләрәк сыфра яхынлашыр. Одур ки, F_n -нин лимити

$$F = \frac{\gamma ah^2}{2}$$

олур. Бу исә мәсәләни һәллини верир.

Демәк шлюза тә'сир эдән гүввә суюн дәринлийи квадраты илә, әнинин исә өзү илә дүз пропорционалдыр.

Элә бу садә мәсәләни һәллиндән сонсуз кичиләнләр анализинин нечә бөйүк әһәмийәтә малик олдуғу көрүнүр.

Гейд этмәк лазымдыр ки, биз бурада чох садә мәсәләрин һәлли үзәриндә сонсуз кичиләнләр анализинин мүндәрәчәсини кәстәрдик. Кечән параграфдакы A вә B типли һәр бир мәсәләни һәлл этмәк үчүн мүхтәлиф лимитләрин һесабыланмасы методлары ярадылмышдыр.

Сонсуз кичиләнләр анализинин әмәлә кәлмәсилә риязийәтә дәйишән кәмийәтләр дахил әдилмишдир. Дәйишән кәмийәтләрә, дәйишән лимит просесиндә дә тәсадүф әдилр.

Әйни заманда чох мүһүм олан ени бир аңлайыш да яраныр. Бир кәмийәтин гиймәти икинчи кәмийәтин гиймәтиндән асылы олур. Икинчи кәмийәт дәйишсә биринчи дә дәйишәр. Мәсәлән, әввәлки мәсәләдә суюн сәвийәси дәйишсә шлюздакы тәйиги дә дәйишәр вә и.а. Башга сөzlә суюн крандакы тәйиги су сәвийәсинин функциясыдыр. Бу кими асылылыға һәр ердә—техникада тәсадүф этмәк олар. Белә асылылыға функционал асылылыг дейәрләр. Одур ки, риязийәтә функция аңлайышы дахил әдилмишдир.

7. ДИФЕРЕНЦИАЛ ВӘ ИНТЕГРАЛ ТӘНЛИКЛӘР

Биз 5-чи параграфда бүтөвә кәрә һиссәни, һиссәйә кәрә бүтөвү тә'йин этмәк һаггындакы мәсәләләр тәдгиг әдирдик. Бу мәсәләләр бири дикәринин тәрси олан садә мәсәләләрдән ибарәтдир.

Тәбиәти өйрәндикчә вә техниканын бир чох проблемләрини һәлл этдикчә даһа мүрәккәб мәсәләләрә тәсадүф этмәк олур.

Бу мәсәләләр ашағыдакылардан ибарәтдир:

1) Кәмийәтләрин һиссәләри арасында мүәййән мүнәсибәтләр верилмишдир; кәмийәтләрин өзләри арасындакы мүнәсибәти тапмаг лазымдыр.

2) Кәмийәтләрин өз араларында мүнәсибәтләр верилмишдир; о кәмийәтләри тапмаг лазымдыр.

3) Кәмийәтләрин һиссәләрилә онларын бә'зиләри арасында мүәййән мүнәсибәт верилмишдир; о кәмийәтләри тапмаг.

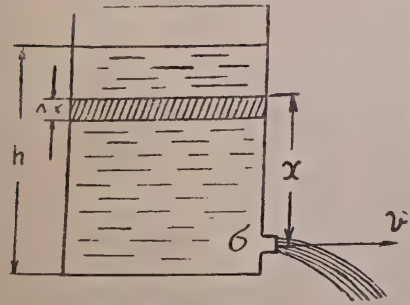
Дедийимиз мәсәләләрдә мүнәсибәтләр үмумийәтлә бәрәбәрликләрлә верилир.

Биринчи тип мүнәсибәтләрә диференциал тәнликләр, икинчи тип мүнәсибәтләрә интеграл тәнликләр, нәһайәт үчүнчү тип мүнәсибәтләрә интегро-диференциал тәнликләр дейилир.

Бунлары изаһ этмәк үчүн бә'зи хусуи мәсәләләр тәд-
гиг әдәк.

Мәсәлә. Силиндрик чәндә су сәвийәсинин һүндүрлүйү
h-дыр. Су чәндән нә гәдәр вахта бошалар (12-чи шәкил).
Бурада көрүрүк ки, һадисә гейри-мүнтәзәмдир. Һади-
сәнин кедиши суюн йүксәк-
лийиндән асылыдыр, йүксәклик
исә дәйишәндир.

Торичеллинин мүшаһидәлә-
ринә көрә ахма сүр'әти белә
тә'йин олунур:



Шәкил 12

$$v = \sqrt{2gx}$$

бурада g ер күрәсинин чазибә
гүввәсинин тә'чилидир ($g =$
 $= 9,8 \text{ м/сан}^2$)

Инди биз һадисәнин һиссәләри арасында мүнәсибәт ярадаг.
Фәрз әдәк ки, t заман кечәндән сонра суюн сәвийәсинин
йүксәклийи x -дир. Чәнин ән кәсийинин S олдуғуну нәзәрә
алсаг вә t заманы Δt гәдәр дәйишсә чәндән бошалан суюн
һәчми $S\Delta x$ олар. Дикәр тәрәфдән исә, кранын әни σ олса
төкүлән суюн һәчми $\sigma v \Delta t$ олар.

Бурада

$$S\Delta x = -\sqrt{2gx} \sigma \Delta t \quad (1)$$

бәрабәрлийини яза биләрик. Бурадакы мәнфи ишарәси она
көрәдир ки, t артанда x азалыр, йә'ни t -нин артымы Δt мүс-
бәт оlanda x -ин артымы Δx мәнфи олур. Бәрабәрлик исә
дүзкүн олмаг үчүн мәнфи ишарәсинин гоюлмасы лазымдыр.

Беләкликлә биз x вә t кәмийәтләринин һиссәләри ара-
сында мүәййән мүнәсибәт, йә'ни мүәййән диференсиал тән-
лик дүзәлтмиш олуруг. Тә'йин әтмишләр ки, (1) тәнлийиндән

$$t = \frac{S}{\sigma} \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

алыныр. Бу тәнлийин һәлли бир чох мә'луматын верилмә-
сини тәләб әдир. Одур ки, бу вә башга тип тәнликләр үзә-
риндә даянмаячайыг. Анчаг гейд әтмәк лазымдыр ки, дифе-
ренсиал, интеграл вә интегро-диференсиал тәнликләр му-
сир риязийятын әсас чәбһәсиндәдирләр. Чүнки онларын
инкишафы физика вә техниканын инкишафы илә әлагәдар-
дыр. Тәйярәчилик, бөйүк кәмиләрин иншасы, бөйүк бина-
ларын вә көрпүләрин гурулушу, маторларын ярадылмасы,
мүхтәлиф тәбиәт һадисәләринин өйрәнилмәси риязийятын бу
һиссәсилә чох бағлыдыр. Чүнки чох вахт бу дедикләримизлә

әлагәдәр олан һадисәләрин бүтөв ганунларыны тапмаг мүм-
күн дейилдир; лакин һадисәләрин һиссәләриндәки гануний-
йәти тапмаг нисбәтән асан олур. Одур ки, һиссәләрә аид
олан ганундан алынан тәнликләр, мәсәлән диференсиал тән-
ликләрин һәлл әдилмәси риязийят әлминин гаршысында ду-
ран ән әсас мәсәләләрдән бирисидир. Риязийят диференсиал
тәнликләри һәлл әтмәклә кәмийәтләр арасында мүнәсибәт
ярадыр. Бу исә бөйүк әһәмийәтә маликдир.

8. СОНСУЗ ЧӘМЛӘР ҺАГГЫНДА

Риязийятда сонсузлуг аңлайышына биринчи дәфә тәбиин
әдәдләрдә тәсадүф әдилмишдир. Тәбиин әдәдләр чохлугу
сонсуздур, йә'ни тәбиин әдәдләрин ән бөйүйү йохдур:

1, 2, 3, 4, ...

Язылан үч нөгтә тәбиин әдәдләр сырасынын сонсуз ола-
раг давам әтдийини көстәрир. Бу аңлайыша бөлмәдә дә
тәсадүф әдилир. Мәсәлән, 10:3 көтүрәк. Бурада

$$\begin{array}{r|l} 10 & 3 \\ \hline 9 & 0,333 \dots \\ \hline 10 & \\ 9 & \\ \hline 10 & \\ 9 & \\ \hline 1 & \dots \end{array}$$

Демәк бурада 0,333... сонсуз онлуг кәсри алыныр. Бу
кәср белә бир сонсуз чәм кими язылыр:

$$0,333\dots = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots$$

Сонсузлуг аңлайышына көкалма әмәлиндә дә тәсадүф әдилир.
Мәсәлән:

$$\sqrt{2} = 1,41\dots$$

Беләкликлә көрүрүк ки, сонсуз чәмләр инсанлара чох гәдим-
дән мә'лум имиш вә сонсуз чәмләр бир чох мәсәләләрин
тәдгигиндә гаршыя чыхыр.

Одур ки, риязийятда сонсуз чәмләрин өйрәнилмәси әсас
мәсәләләрдән бириси олмушдур.

Бурада һәр шейдән габаг сонсуз чәм нә олдуғунун тә'-
рифини вермәлийик.

Ихтияри сонсуз чэм көтүрөк:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (1)$$

Бурада $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ мүййөн эдэдлөрдир.

Биз бурада

$$S_1 = a_1,$$

$$S_2 = a_1 + a_2,$$

$$\dots \dots \dots + a_n,$$

$$\dots \dots \dots$$

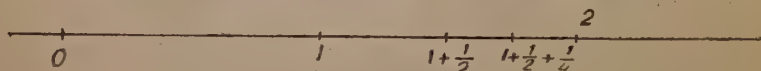
ардычыллыгыны тәртиб эдөк. Экәр n сонсуз артдыгда S_n -нин мүййөн лимити варса бу лимитэ (1)-ин чэми дейэчө-йик. Экс һалда дейэчөйик ки, (1) чэми йохдур.

Сонсуз чэм ола да билэр, олмая да билэр. Бунун үчүн мисаллар кәтирөк.

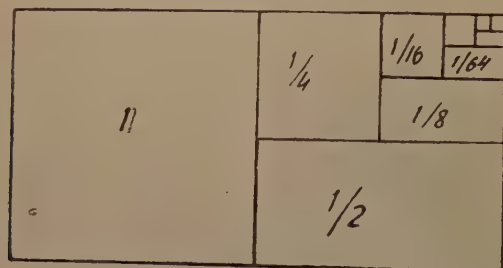
Мисал 1.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

сонсуз чэмини тэдгиг эдөк. Бу сонсуз чэмин варлығы һәр ики шәкилдән көрүнүр (13 вә 14-чү шәкилләрә бах). Һәр ики шәкилдән көрүнүр ки, бу сонсуз чэм 2 дир.



Шәкил 13



Шәкил 14

Мисал 2.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \quad (2)$$

сонсуз чэмини көтүрөк. Көстәрөк ки, бу сонсуз чэмин чэми йохдур, башга сөзлө онун чэми сонсузлугдур.

Бунун үчүн ону белә группашдыраг:

$$[1] + \left[\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right] + \left[\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right] + \dots \quad (3)$$

Айдындыр ки,

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

вә и. а.

Инди биз белә бир сонсуз чэмә бахаг:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \quad (4)$$

Айдындыр ки, бу сонсуз чэмин чэми сонсузлугдур. Чүнки $\frac{1}{2}$ -ләрин сайы сонсуз артыр, она көрә чэм дә сонсуз арта-чагдыр.

(4)—үн һәр һәдди (3)—дәки мө'тәризәләрдән бөйүк де-йил. (4)—үн чэми сонсуз олдуғундан (3)—үн дә чэми сон-суз олар, йә'ни (2)—нин чэми сонсуздур.

Сонсуз чәмләр мүасир риязийтын ән әһәмийәтли ва-ситәләриндәндир. Мәсәлән, гам вә кәсирлә ифадә ола бил-мәйән ифадәләр мүмкүн олан һалларда сонсуз чәмләрлә ифадә этдирилир.

Даһа бир мисал кәтирөк. 1-и $(1-x)$ -ә бөлсәк аларыг:

$$\frac{1}{1+x} \left| \frac{1-x}{1+x} \right. \\ +x \\ \frac{1-x+x^2}{1+x^2} \\ \dots$$

Демәк

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots \quad (5)$$

Дәгиг апарылан тәдгигат көстәрир ки, (5) ифадәси анчаг x -ин мүтләг гиймәтчә ваһиддән кичик гиймәтләриндә доғ-рудур. Буну вә бунун сәбәбини сонсуз кичиләнләр ана-лизиндә көстәрмәк олур.

Даһа бир мисал көтүрөк. Көстәрмәк олур ки,

$$\lg_{10}(1+x) \cong 0,4342 \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \right] \quad (6)$$

олур вэ бу $|x| < 1$ үчүн доғрудур.* Бу вэ бундан алынган формулалар васитәсилә әдәдләрин логарифмалары тә'йин әдилир вэ логарифма чәдвәлләри гурулур.

Сонсуз чәмләрин ишләнилмәсиндә ашағыдакы проблемләр ортая чыхыр:

1. Верилмиш кәмийәти сонсуз чәмлә ифадә этмәк методу. Биз бурада анчаг садә бәлмә методуну ишләтдик. Бундан башга бир чох методлар да вардыр.

2. Алынган сонсуз чәм һансы шәртләрдә мүйәйән чәмә маликдир.

3. Сонсуз чәмин чәмини тапмаг методлары. Бу методлардан ән үмумиси сонлу мигдарда биринчи һәдләри кәтүрүб чәмләмәк вэ атылан һиссәни гиймәтләндирмәкдән ибарәтдир; демәк үмумийәтлә сонсуз чәмин чәми тәгриби тапылыр.

4. Сонсуз чәмләри әлә дәйишдирмәк лазымдыр ки, о даһа тез йығылсын, йә'ни чәмин тәгриби гиймәтини тапмаг үчүн даһа аз мигдарда һәдд кәтүрмәк лазым кәлсин.

Бу проблемләр риязийятын ән әһәмийәтли проблемләриндәндир. Бу проблемләрин һәм нәзәри, һәм дә тәчрүби әһәмийәти вардыр.

Сонсуз чәмләрин әһәмийәти ондан ибарәтдир ки, бурада мүрәккәб ифадәләр садә ифадәләрин чәми кими кәстәрилиз. Мисал үчүн (6) формуласыны кәтүрмәк олар.

Сонсуз чәмләрин тәдгиги һазырда енә дә давам әдир.

9. МАКСИМУМ ВЭ МИНИМУМ ҺАГГЫНДАКЫ МӘСӘЛӘЛӘР

Инсан тәчрүбәсиндә бә'зән әлә проблемләр алыныр ки, орада бир кәмийәтин мүмкүн олан гиймәтләринин ичәриндә ән бөйүк яхуд ән кичик гиймәтин нә вахт алыначагынын билинмәси лазым кәлир.

Мисал үчүн белә бир мәсәләни тәдгиг әдәк. Узунлуғу C олан бир чәпәр вардыр. Диварын янында саһәси ән бөйүк олан дүзбучағлы бир ери бу чәпәрлә әһатә этмәк лазымдыр. (шәкил 15-ә бах).

Бу шәкилдән айдындыр ки, ахтарылан бу ерин өлчүләри x вэ $C-2x$ -дир. О һалда һәмин саһә

$$S = x(C-2x)$$

олар. Бурада көрүрүк ки, x дәйишәндә ерин саһәси S -дә дәйишир. Мәсәлән, $x = \frac{C}{3}$ оlanda $S = \frac{C^2}{9}$ олур; $x = \frac{C}{5}$

оланда $S = \frac{3C^2}{25}$ олур, $x = \frac{C}{2}$ оlanda $S = 0$,

$x = 0$ оlanda S енә дә сыфыр олур. Демәк 0 илә $\frac{C}{2}$ арасында x үчүн әлә гиймәт вардыр ки, о гиймәтдә S ән бөйүк гиймәт алыр.

Инди мәсәләни һәлл әдәк. Бунун үчүн S -и белә язаг:

$$S = -2 \left(x - \frac{C}{4} \right)^2 + \frac{C^2}{8}.$$

Бурада көрүрүк ки, x дәйишдикдә анчаг биринчи топланан дәйишир вэ бу топланан да һәмишә мүсбәт дейилдир.

Одур ки, S -ин ән бөйүк гиймәти бу һәддин сыфыр гиймәтиндә, йә'ни $x = \frac{C}{4}$ гиймәтиндә алыныр. Демәк мәсәлә

белә һәлл олунур: чәпәрин учларындан онун дөрддә бири гәдәри гатланмалыдыр. Демәк

$$S_{\max} = \frac{C^2}{8}$$

олур.

Икинчи бир мәсәлә һәлл әдәк:

$x^2 - 6x + 21$ үчһәддисинин ән кичик гиймәтләрини тапын. Бунун гиймәтини y -лә ишарә әдәк:

$$y = x^2 - 6x + 21.$$

Һәмин методла бу мәсәләни һәлл әдәк. Айдындыр ки,

$$y = (x-3)^2 + 12$$

олур. Бурада y -ин минимуму $x=3$ гиймәтиндә алындығыны көрүрүк. Демәк

$$y_{\min} = 12$$

дир.

Башга мәсәләләрә бахсаг орада ифадәләр чох мүрәккәб алыныр. Одур ки, чох вахт кәстәрдийимиз бу метод ярамыр. Демәк бизим юхарыда ишләтдийимиз метод, үмуми метод дейилдир.

* 10-чу параграфа бахын.

Кэмийэтлэрин эн бөйүк вэ эн кичик гиймэтлэринин табылмасында ишлэнилэн үмүмү методлары бизэ енэ дэ сонсуз кичилэнлэр анализи верир.

Риязийтын гаршысына даһа мүрөккөб мәсэлэлэр дэ гоюлур:

Узунлуғу l олан гапалы сап верилмишдир: бу сап һансы форманы алмалыдыр ки, тэ'йин этдийи саһа максимум (эн бөйүк) олсун.

Даһа бир мисал көтүрөк. Физикадан мә'лумдур ки, ишыт мүнүтдэ эн аз заман сәрф олуна йолла яйылыр. Одур ки, о йолун формасы элэ олмалыдыр ки, сәрф олуна заман мүмкүн гэдэр аз (эн кичик) олсун.

Бу вэ бу кими мәсэлэлэрин һәлли чох мүкәммәл методлар тәләб эдир. Бу методлары енэ дэ сонсуз кичилэнлэр анализи вэ онун сонракы инкишафы яратмагдадыр. Мүрөккөб максимум вэ минимум мәсэлэлэрини һәлл этмәк үчүн риязийятда хусуси һиссә яранмышдыр. Буна вариасия һесабы дейирлэр. Вариасия һесабынын инкишафында вэ онун мәсэлэлэринин һәллиндә Совет риязийятчыларынын бөйүк хидмәтлэри вардыр.

10. БӨЙҮК ҺЕСАБЛАМАЛАР

Мәшһур Данимарка алыми Тихо Браге (1546—1601) планеталарын күнәш әтрафындакы һәрәкәтлэрини узун мүддәт муһаһидә этмишдир. Бу муһаһидәлэрин нәтижәсиндән истифадә эдәрәк алман алыми Кеплер (1571—1630) планеталарын һәрәкәт ганунларыны тә'йин этмишдир:

1. Планеталар мүййән мүстәвиләрдә эллипс хәтлэри үзрә һәрәкәт эдирләр, белә ки, күнәш бу эллипсин фокусларынын бириһинлә ерләшибдир.

Эллипс 17-чи шәкилдә көстәрилән кими рәсм олуна билән хәттә дейирләр.

2. Һәр планетанын радиус вектору бәрабәр заманларда бәрабәр саһәләр чызыр.

3. Һәр планетанын күнәш әтрафында дөврәтмә заманы квадратынын онун күнәшдән олан орта мәсафәсинин кубуна олан нисбәти сабит кэмийәтидир (шәкил 16)

$$\frac{T_{\text{меркури}}^2}{R_{\text{меркури}}^3} = \frac{T_{\text{венера}}^2}{R_{\text{венера}}^3} = \frac{T_{\text{Ер}}^2}{R_{\text{Ер}}^3} = \dots = \text{сабит}$$

Кеплер бу үч гануну әлдә этмәк үчүн бир чох бөйүк әдәдләр үзәриндә чәтин һесабламалар апармыш, бир нечә ил вахт сәрф этмишдир. Лакин һазырки риязийят машинлары бу һесабламалары бир нечә күндә әлдә әдә биләриләр.

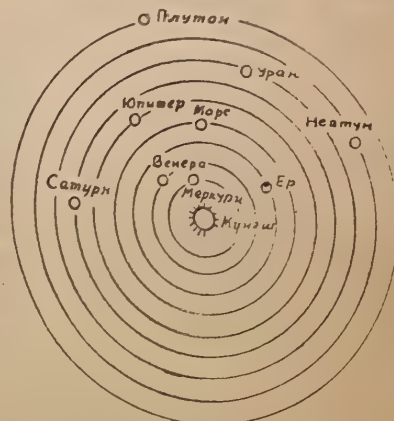
Одур ки, һәчмән чох бөйүк олан һесабламалары апармаг үчүн инсанлар чох васитәләрдән истифадә этмәйә чалышылән дәгигликлә апарыр.

Бу васитәләр һаггында мүййән тәсәввүр яратмаг үчүн онларын бәзиләри һаггында бир гэдәр мә'лумат верәк.

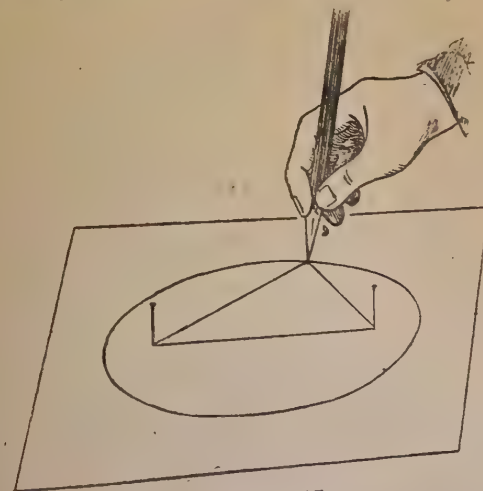
Мәсәлән, ики әдәдин вурулмасыны көтүрөк. Вурма әмәли үчүн бир чох васитәләр вардыр. Бунлардан анчаг үчүнү көстәрәк.

1. Чәдвәл васитәсилә вурма. Хусуси чәдвәлләр һазырланыр. Бу чәдвәлләр ади вурма чәдвәлинин инкишафыдыр. Бу чәдвәлләрдә лазым олан чох әдәдләр

рин вурулмасы көстәрилмишдир (чәдвәлә бах). Бу чәдвәлләр китаб шәклиндәдир вэ 1—1000, 1—10.000 вэ и. а. әдәдләри әһатә эдир.



Шәкил 16



Шәкил 17

2. Логарифма методу илә вурма. Чәбрдән мә'лумдур ки, гайдалары әйни олан ифадәләр вурулдугда о ифадәләрин үстләри топланыр:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (1)$$

Беләликлә бурада көрүрүк ки, вурма әмәли топлама

эмелинэ кэтирилир. (1) дүстурунун сол тэрэфиндэ вурма, саг тэрэфиндэ исэ топлама эмели вар. Бу ганун чох эһэмий-йэтлидир. Чүнки бу гануна көрө вурма эмели ондан даһа асан олан топлама эмелинэ кэтирилир.

Бурадан белэ бир нэтичэйэ кэлмэк олур: ики эдэди вурмаг үчүн онлары эйни гайдалы гүввэт кими язмаг вэ сонра исэ онларын үстлэрини топламаг лазымдыр. Айдындыр ки,

1	2	3	...	99	100
2	4	6	...	198	200
3	6	9	...	297	300
...
99	198	297	...	9801	9900
100	200	300	...	9900	10.000

һасили тапмаг үчүн мүййән үст вэ гайдая көрө эдэди тэ'йин этмэлийик.

Тэчрүбэдэ буну белэ һәлл этмишләр. Эввэлчэ хүсуси чэдвәлләр һазырланмышдыр. Бу чэдвәлләрдә һәр бир эдэдин мүййән гайдая көрө, мәсәлән, 10 гайдасына көрө үстү тэ'йин эдилмишдир. Бу үстә эдэдин логарифмасы дейилир вэ белэ язылыр:

$$\log_{10} a = b,$$

йә'ни a эдэдинин 10 гайдасына көрө логарифмасы b дир, йә'ни $a = 10^b$.

Тәртиб олуна чэдвәлләрә исэ логарифма чэдвәли дейилр (чэдвәлэ бах).

Логарифма чэдвәли

a	b
1	0,0000
2	0,3010
3	0,4771
4	0,6021
5	0,6990
6	0,7782
7	0,8451
8	0,9031
9	0,9542
10	1,0000

Инди бир мисал һәлл эдәк. 2 илэ 3 эдәдләрин һасилини тэ'йин эдәк.

Чэдвәлдән:

$$\log_{10} 2 \cong 0,3010,$$

$$\log_{10} 3 \cong 0,4771.$$

Демәк

$$\log_{10} 2 \cdot 3 \cong 0,7781.$$

Чэдвәлдән исэ логарифманын тәгриби гиймәтини нәзәрә алсаг

$$2 \cdot 3 = 6$$

олар.

Логарифма чэдвәлини биринчи дэфә тәртиб эдән Шотландия алыми Чон Непер (1550—1617) вэ онун яхын досту Генри Бриге (1556—1630) олмушдур.

Һазырда чохлу һесабламаһар аһаран һәр алимин, мүйһәндисин вэ башга ишчиләрин эһиндә логарифма чэдвәлләри бөйүк вәситәдир. Истәнилән саһәдә ишләйән мүйһәндисин вэ техникин, штурманын, топчунун, хүсусән астрономун бу чэдвәлэ бөйүк эһтијачы вардыр. Франса алыми Лаплас демишдир ки, „логарифмаларын кәшфи астрономун ишини азалтмагла, онун өмрүнү узатмышдыр“.

Гейд этмәк лазымдыр ки, мүәсир логарифма чэдвәлләри даһа дәгигдир. Бунун вәситәсилә чохәдәдли һесабламаһар аһарылыр. Бу һагда орта мәктәбин 9-чу сивфиндә кениш мә'лумат верилир. Һәр бир эдэдин мүййән гайдая көрө үстүнү тапмаг, йә'ни о эдэдин логарифмасыны тапмаг али риязийятын мүййән гайдаларынын көмәйи илэ әлдә эдилир. Бу һагда али мәктәбләрдә мә'лумат верилир*.

Биз бурада инди тарихи эһәмийәти олан, лакин чох асан баша дүшүлә билән бир метод һаггында „гыса мә'лумат верәк.

Һолландия алыми мүйһәндис Симон Стевин (1548—1620) $(1+r)^n$ эдәдләринин мүхтәлиф r вэ n -ин гиймәтиндә чэдвәлини вермишдир. Бу эдәдләр чэдвәли мүрәккәб фаизләрин һесабланмасы үчүн ишләнилирди. Сонралар Кеплерин көмәкчиси олан Исвечли Юста Бюрги (1552—1632) бу чэдвәлләри һесабламаһар ишиндә ишләтмишдир. О, Стевин кими $r=0,01$ гәбул эдиб $(1+r)^n$ эдәдләри чэдвәлини гурмушдур:

$$1,01 = 1,01,$$

$$1,01^2 = 1,01 + 0,0101 = 1,0201,$$

$$1,01^3 = 1,0201 + 0,010201 = 1,030301$$

вэ н. а.

Бу чэдвәли гурмаг чәтин дейилдир. Бурада һәр дэфә эдэдин үзәринә онун йүздә бирини әләвә этмәк лазымдыр.

Бу чэдвәлин гурулмасында ики чәтинлик вардыр: 1) n аргдыгча рәгәмләрин сайы да артыр; 2) бурада анчаг там дәрәжәләр вар (n там гиймәт алыр).

Биринчи чәтинлийи арадан галдырмаг үчүн эдәдләри юварлайырлар, йә'ни онлара яхын лакин мүнәсиб эдәдләр

* 8-чи параграфдакы (6) формула бахын.

көтүрүүлөр. Икинчи четинлийи ортадан галдырмаг үчүн верилмиш эдэди чэдвэлдэ олан яхын эдэдлэ эвэз эдирлэр. Мисал үчүн:

$$5,19. 1,87.$$

насилина бахаг. Бу эдэдлэр чэдвэлдэ йохдур. Одур ки, бунлара яхын олан эдэдлэр көтүрүүлүр: биринчи эвэзинэ 5,165, икинчи эвэзинэ исэ 1,872. Бу халда

$$5,165. 1,872 =$$

$$= 1,01^{165} \cdot 1,01^{63} = 1,01^{228}$$

алыныр. Чэдвэлдэн $1,01^{228}$ -ин гиймэтинин 9,668 олдуғу тэ'йин эдилир. Демэк

$$5,19. 1,87 \approx 9,668$$

олур.

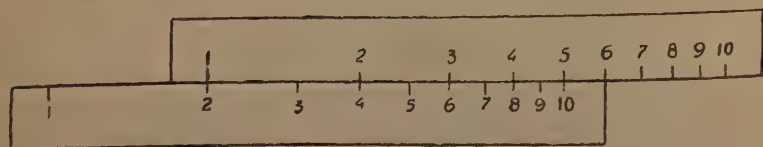
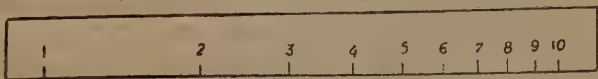
Гейд этмэк لازمдыр ки, логарифма методу башга эмэллэрдэ да ишлэнэ билир. Доғрудан да, чэбрдэн мә'лум-дур ки,

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

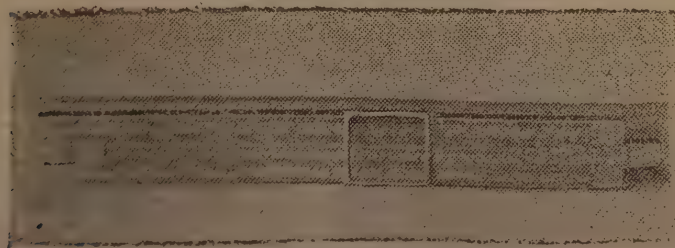
$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Демэк бөлмэ эмэли чыхма эмэлине, гүввәтә йүксәлтмә эмэли исэ вурма эмэлине кәтирилир.

Юхарыда көстәрдийимиз логарифма методуну чэдвәлләр эвэзинэ мүййән линейкалар васитәсилә да ишләтмәк олар. Бир линейка үзрә эдәдин логарифмасыны гейд эдиб үзәринә эдәди язаг. Нәтичәдә шәкилдә көстәрилән кими бир гейри бәрабәр шкала алыныр. Бу кими шкаланын икиси олса эдәдин насилини тапмаг олар. Мәсәлән $2 \times 3 = 6$ насилини шәкилдәки кими тапмаг олар.



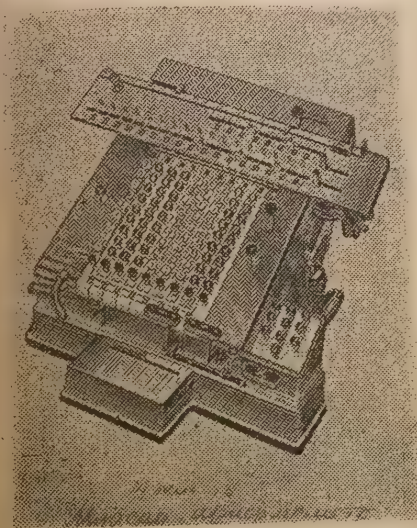
Шәкил 18



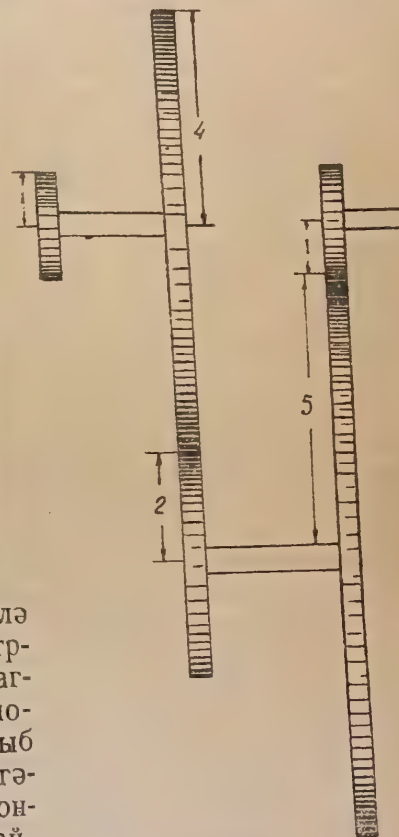
Шәкил 19

3. *Һесаблама машинлары.* Ики эдәдин вурулмасыны арифмометр васитәсилә да ичра этмәк олар.

Арифмометрин принципи бундан ибарәтдир: Мүййән дишли чархлар мүййән васитәләрлә бағлыдырлар. Биринчи чарх бир там фырландыгда икинчиси онда бир фырланыр, икинчи чарх бир там фырландыгда үчүнчүсү онда бир фырла-



Шәкил 20



Шәкил 21

ныр вә и. а. (21-чи шәклә бахын). Бир эдәди арифмометр-дә йығмаг үчүн уйғун бармаг-лары дүзәлдирләр вә арифмо-метри бир дэфә фырладыб чархларда уйғун рәгәмләр гә-дәр фырланыш ярадырлар. Сон-ра икинчи эдәди һәммин гай-да үзрә йығдыгда бу эдәдләр топланыр. Нәтичә исэ чарх-ларын шкаласында көстәрилир. Вурма эмэлине да гыса топ-лама эмэли кими бахсаг, йәни бир эдәд икинчи эдәдә ву-рулдугда биринчи икинчиси гәдәр өз-өзүйлә топланмасыны дүшүнсәк, дедийимиз кими тәртиб олунан машин вурманы да эдәчәкдир.

Һазырда чох мүкәммәл арифмометрләр һазырланмышдыр: бунларда фырланма артыг әл илә дейил, электрик матору васитәсилә эдилир.

Инди чох сүр'әтли вә бир чох эмәлләри бир вахтда эдә билән машинлар һазырланараг ишләдилир. Бу риязи машин-

ларын гурулуш принциплери вэ онларын этдиклери хесаб-ламаларын тэсвири бизим бу китабчанын планындан харичэ чыхыр.

Бир сыра мүасир машинларын үмуми принципи һаггында мүэйһэн мә'лумат верэк. Мә'лумдур ки, бир-биринэ һеч дэ бәһзәмәйһэн һадисәләр кәмийһәтчә эйһи риязи ганунлара габедирләр. Одур ки, бу һадисәләрден бирисини мүшаһидә этсәк, дикәрини дэ өйрәнмиш оларыг. Мәсәлән шәбәкәдәки электрик чәрәяһи илә мәсаматлы мүһитдәки нефтин сүзүл-мәси чох фәргли һадисәләрдир. Лакин шәбәкәдәки чәрәяһини иниддәти илә мәсаматлы мүһитдәки нефтин сүзүлмәсинин сүр'әти риязи олараг эйһи гануна табедирләр. Бурада мәсә-лән электрик чәрәяһи маенин сүзүлмәси сүр'әтилә эйһи риязи гануна табедирләр. Одур ки, электрик һадисәләрини мүшаһидә этмәк асан олдуғундан нефтин сүзүлмәсини дэ электрик һадисәләри илә өйрәнирләр. Бу мәгсәдлә гурулан электрик системинә электромодел дейилир. Метода исә электроанало-кия дейилир.

11. АНАЛИТИК ҺӘНДӘСӘ

Эвклид һәндәсәсинин методлары ени һәндәси образлары, хәтләри, сәтһләри, һәчмләри өйрәнмәкдә чәтинликләрә раст кәлир.

Кепләрә көрә планеталар эллипс хәтти үзрә һәрәкәт әдирләр. Галилей исә бучаг алтында атылан чисмин (мәрми) бошлугда парабола хәтти үзрә һәрәкәт этдийһини кәстәрмиш-дир (22-чи шәклә бах). Мүхтәлиф физики ганунларын өйрәнил-мәси, бу вә я дикәр мүрәккәб һәндәси образларын өйрәнил-мәсинә кәтирилир.



Шәкил 22

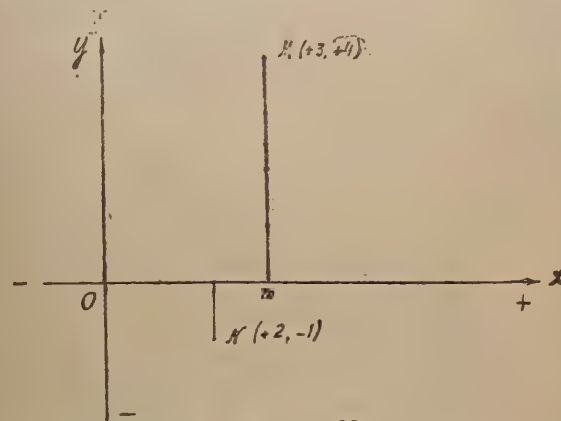
Бу кими мәсәләләр ени методларын, ени һәндәсәнин яран-масыһи тәләб әдирди. Бу тәләбат XVII әсрдә Авропада капитализмин яранмасы дөврүнә дүшүр.

Эллипс, парабола кими һәндәси образлар 2000 ил эрамыз-дан әввәл юнан риязийәтчыларына мә'лум иди. Лакин орта әсрләрдә тәләбат олмадығындан бунлар тамамилә унутулмуш иди.

XVII әсрин биринчи ярысында тамамилә ени һәндәсә яранды. Бу һәндәсә әсас э'тибарилә франсыз алими Декартын гәдигаты нәтичәсиндә ярадылмышдыр. О, һәндәси образ-ларын даһа үмуми хассәси олан вәзийәти әдәдләр вәситә-

силә өйрәнмәйи тәклиф әдирди. Айдындыр ки, әдәд-ләр вәситәсилә һәндәси образларын элементләринин вәзий-йәти мә'лум олса, онларын башга хассәләрини, мәсәлән, метрик хассәләрини (өлчүләрини) тә'йин этмәк олар.

Декарт бу фикри белә еринә етирмишдир. О, мәсәлән, бир мүстәви үзәриндәки һәндәси образлары өйрәнмәк үчүн ики бир-биринә перпендикуляр ох көтүрүр (23-чү шәклә бах). Бу мүстәви үзәриндәки нөгтәнин вәзийәти мүэйһән маштаба көрә *от* вә *тм* парчаларыһын узунлугларыһи тә'-йин әдән әдәдләрлә тә'йин әдилир.



Шәкил 23

Бу әдәдләрә М нөгтәсинин координатлары дейилир. Шәкилдән айдындыр ки, М нөгтәсинин координатлары $(+3, +4)$, N нөгтәсинин координатлары исә $(+2, -1)$ дир.

Демәк, мүстәви үзәриндәки һәр нөгтәйә гаршы еканә ики әдәд (әдәдләр чүтү) вә әксинә, һәр әдәдләр чүтүнә гаршы еканә нөгтә вардыр.

Әкәр мүстәви үзәриндә нөгтәләр чохлуғу яхуд хәтт олса онлара гаршы чүтләр чохлуғу дурур. Бу чүтләри мүэйһән ганун үзрә тәнлик вәситәсилә версәк, дейә биләрик ки, һәр нөгтәләр чохлуғуна яхуд хәттә гаршы тәнлик вардыр.

Мәсәлән, мүстәви үзәриндә чеврәни көтүрәк. Чеврә әлә нөгтәләрин һәндәси еридир ки, онлар мәркәздән (М-дән) эйһи мәсафәдә (R мәсафәсиндә) дурурлар (24-чү шәкил). М мәркәзинин координатлары (a, b) , чеврәнин ихтияры нөгтә-синин координатлары (x, y) илә ишарә этсәк, шәкилдән М N P дүзбучағлы үчбучағындан

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \quad (1)$$

алыһыр.* Демәк, чеврәйә гаршы (1) тәнлийи гоюлур.

* Бурада дүзбучағлы үчбучағын мүэйһән хассәси истифадә олун-мушдур: дүзбучағлы үчбучағын кәтәтләринин квадратлары чәми онун гипотенузасыһын квадратына бәрабәрдир.

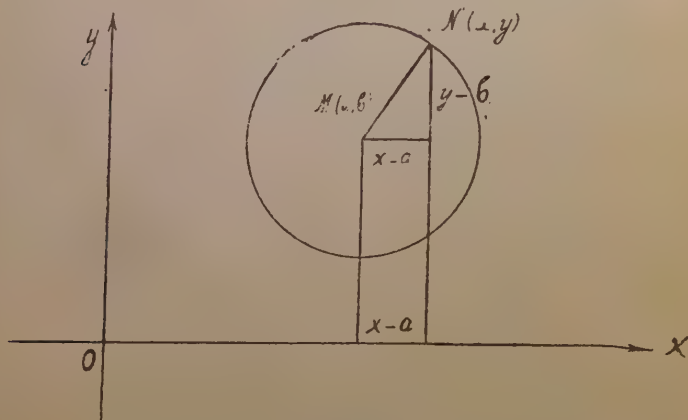
Һәндәси образларла чәбри образлар арасындагы бу гаршылыглыг һәндәси образлар һаггындагы проблемләри чәбри проблемләринә кәтирир.

Декартын яратдыгы бу һәндәсәйә аналитик һәндәсә дейилир.

Аналитик һәндәсә риязийятын бөйүк наилийәтләриндән бирисидир. Бунун яранмасы илә мүрәккәб һәндәси образларын өйрәнилмәси иши асанлашыр.

Мәсәлә.

$$x^2 + y^2 - 2x - y - \frac{1}{4} = 0 \quad (2)$$



Шәкил 24

тәнлийи һансы һәндәси образы тә'йин эдир.

Бу суала чаваб вермәк үчүн о тәнлийи (1) шәклинә кәтирәк:

$$(x-1)^2 + (y-\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{2}.$$

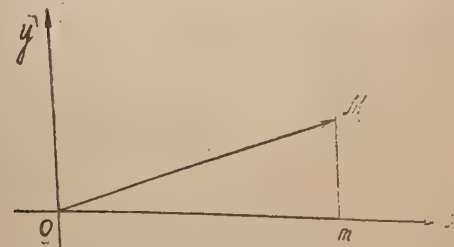
Демәк (2) тәнлик, мәркәзи $M(+1, +\frac{1}{2})$ нөгтәсиндә олан

вә радиусу $\sqrt{\frac{3}{2}}$ олан чеврәни верир.

Мүстәвидә нөгтәнин вәзийәтини 25-чи шәкилдәки кими векторла да кәстәрмәк олар. Одур ки, әдәдләр чүтү әвәзинә бир векторун көтүрүлмәси, методу даһа да садәләшлирир.

Риязийятын векторлары өйрәнән һиссәсинә векторлар һесабы дейилир.

Биз һәмишә һәндәси образлары мүстәви үзәриндә тәдгиг әдирдик. Бу дедикләригиз үч слчүлү фәзайә дә көчүрүлә билир.



Шәкил 25

12. ЕНИ ҺӘНДӘСӘЛӘР

Мәктәбдә өйрәнилән һәндәсә Эвклидин һәндәсәси адланыр. Бу һәндәсә бизим эрадан әввәл ярадымышдыр.

Эвклид һәндәсәсиндә бир сыра әввәлдән гәбул олунмуш тәклифләр (постулатлар вә аксиомалар) вардыр.

Бу тәклифләр ичәрисиндәки V постулатын ифадәси беләдир: бир мүстәви үзәриндә верилмиш дүз хәтт үзәриндә олмаян нөгтәдән о дүз хәттә параллел олан анчаг бир дүз хәтт кечирмәк олар.

Шәкил 26

Ядыныза салаг ки, бир мүстәви үзәриндә ики дүз хәтт кәсишмәзсә онлара параллел дүз хәтләр дейилир (шәкил 26).

Бу постулат узун мүддәт алимләри дүшүндүрмүшдүр. Бурадагы чәтинлик дүз хәтләрин һәр ики тәрәфә сонсуз узадылмасыдыр.

V постулатын чәтин олмасына көрә ону һәндәсәдән чыхартмаг, яхуд ону башга чүр ифадә этмәк, даһа садәси, ону бир теорема кими исбат этмәк тәшәббүсүндә оланлар чох олмушлар.

Бу мәсәлә илә юнан Прокл (V әср, бизим эрадан габаг) әзәрбайчан алими Мүһәммәд Нәсирәддин Туси (XIII әср), инкилис Валлис (1616—1703), италян Саккери (1667—1733), алман Ламберт (1728—1771), франсыз Лежандр (1752—1833),

вə башгалары мəшғул олмушлар. Лакин бунларын тəшəб-
бүслəri нəтичəсиз галмышдыр.

Параллеллэр һаггындакы бу проблем XIX əсрин əввəллə-
ринə гəдэр ачыг галмышдыр. Бу проблем XIX əсрин əв-
вəлєриндə эн вачиб мəсəлэлəрдən бири сайылырды. Бу проб-
лем һаггында Гаусс, Лагранж, Даламбер, Лежандр кими
нəһəнк алимлэр дүшүнүрдүлэр.

Бу проблеми биринчи дəфə һəлл эдэн Казан университе-
тинин профессору Н. И. Лобачевски олмушдыр. О, бу һагда
чыхартдыгы элми нəтичэлəri 1826-чы илдə Казан университе-
тиндə мə'рузə этмишдыр.

Лобачевски V постулатын һөкмүнүн тəрсини фəрз эдэрək
дүз хəттин харичиндəки нөгтэдэн бир йох, эн азы ики парал-
лел дүз хəтт кечирмək олар дєйə гəбул этмишдыр.

Лобачевски Эвклидин галан тəклифлəri илə бу ени пос-
тулаты бирликдə кəтүрүб һəндəсəни инкишаф этдирир вə
һеч бир зиддийəтə раст кəлмир. О, ашағыдакы нəтичэлəri
алыр:

1. V постулат Эвклидин галан тəклифлєринə əсасланараг
исбат олуна билмəз.

2. Эвклидин V постулатынын əксини фəрз этдикдə дə
һеч бир зиддийəт алынмыр вə ени һəндəсə гурулур.

Белəликлə Лобачевски риязийятə сон дэрəчə мүнүм олан
енилик дахил эдир: *мантиги оларəг екəнə бир һəндəсə де-
йил, чох һəндəсэлэр вardyр.*

Бурада белə бир суал чыхыр: бəлкə ени һадисэлєрин тəч-
рүби əһəмиййəти йохдур.

Лобачевски өзү инанырды ки, ени һəндəсэлэр ени меха-
ника, ени физика илə əлагəдардыр.

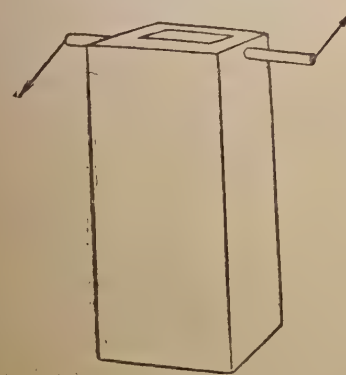
Лобачевскинин бу даһиянə фикри анчаг XX əсрин əввəл-
лєриндə еринə етирилди: Эйнштейнин яратдыгы нисбилик
нəзəриййєсиндə ишлənən һəндəсə ени һəндəсə олду.

Лобачевскинин бу кəшфи элмдə материалистик ингилаб
яратды. Мин иллэрлə екəнə фəрз олунан Эвклид һəндəсəси
артыг екəнəлийиндэн чыхды. Ени һəндəсэлєрин бə'зи факт-
лары кəһнə һəндəсəнин фактларындан фəрглєнир. Мəсələn
элə һəндəсə вар ки, үчбучагын дахили бучаглары чəми 180
дэрəчэдэн чох, элəsi дə вар ки, һəмин чəм 180 дэрəчэдэн
аздыр. Һалбуки Эвклид һəндəсəсиндə һəмин чəм дəгиг 180
дэрəчəдир.

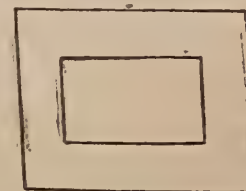
Лобачевскидэн сонра ени һəндəсэлэр яратмаг вə ону эл-
мин мүнхтəлиф саһэлєриндə ишлəтмək иши кениш инкишаф
эдир вə инди дə этмəкдəдир.

3. ЧЕВИРМƏЛƏР МЕТОДУ

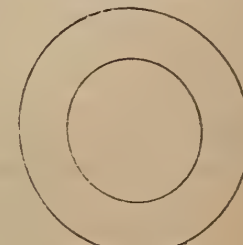
Риязийятда чох ишлənən методлардан бириси дə чевир-
мəлэр методудур. Бу методун əсас идеясы ашағыдакындан
ибарəтдир. Фəрз эдək ки, мүнхтəви резиндэндир. Экəр мүнх-
тəви үзєриндəки образлар мүнхтəкəб олсалар биз резини мүнх-
йєн ганунла дартараг яхуд сыхараг онлары чевириб садə
образлара кəтиририк. Экəр мүнхйєн бир мəсələ садə образ



Шəкил 27



Шəкил 28



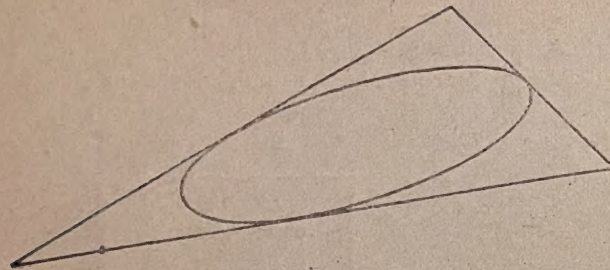
Шəкил 29

үчүн һəлл олунубса о, кери гайыдараг, мүнхтəкəб образ үчүн
дə һəлл олуна билэр. Мисал үчүн белə бир мəсələйə бахаг.
Фəрз эдək ки, эн кəсийи 27-чи шəкилдəки кими дүзбучаглы
һалгадаң ибарəт олан борунун бурулмасыны өйрəнмək истə-
йирик. Йə'ни верилən гүввəтə кəрə бурулманын бөйүклүйүнү
тə'йин этмək лəзымдыр.

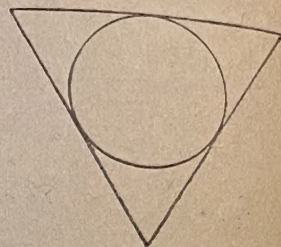
Экəр бу мəсələ даирəви һалга үчүн һəлл олунубса, биз
юхарыдакы методу ишлəдə билəрик: мүнхтəвини резиндэн
фəрз эдиб ону элə дəйишдиририк ки, дүзбучаглы һалга
(шəкил 28), даирəви һалга кəтирилсин (шəкил 29). Сонра
бурулманын кəсийи даирəви һалга олан бору үчүн өйрəниб
верилмиш боруя гайытмалыдыр.

Бу фикри изаһ этмək үчүн даһа бир мисал кəтүрək.

Мəсələ. Верилмиш эллипсин харичинə саһəsi эн аз
олан үчбучаг (шəкил 30) чызмаг лəзымдыр. Бу мəсələни
даирə үчүн һəлл этмək олар. Бу үчбучаг бəрəбэр тэрəфли
олмалыдыр (шəкил 31). Инди биз мүнхтəвини эллипсин бөйүк
оху истигамəтиндə сыхмагла, яхуд кичик оху истигамəтиндə
дартмагла мəсələни даирəйə кəтирмək олур. Бурдан анла-
шылыр ки, ахтарылан үчбучаглар сайсыз чохдур.



Шәкил 30



Шәкил 31

14. ТӘСАДУФИ ҺАДИСӘЛӘР

ЭНТИМАЛ НЭЗЭРИЙҖӘСИ

Элә һадисәләр вардыр ки, онлары ярадан сәбәбләр чох олдуғундан һәммин һадисәләрин йәгинлийини әввәлдән демәк чох чәтин вә я мүмкүн дейилдир. Мәсәлән, ерин мүәййән нөгтәсиндә, мүәййән заманда температуранын нә гәдәр олачағы суалына чаваб вермәк чәтиндир. Чүнки бу температураны төрәдән сәбәбләр чохдур вә мүрәккәбдир.

Икинчи бир мисал көтүрәк. Бир чисмин узунлуғуну өлчмәк лазымдыр. О узунлуг әйни васитәләрлә әйни шәраитдә белә өлчүлсә енә дә нәтичәләр мүхтәлиф олар. Чүнки һәр өлчүдә мүәййән харичи сәбәбләр вардыр (мүшаһидәчи вә и. а.).

Үчүнчү бир мисал даһа көтүрәк. Мә'лумдур ки, маенин ичәрисиндә чох кичик олан һиссәчикләр асылы шәкилдә һәрәкәт әдирләр. Һиссәчикләрин һәрәкәт әтмәсинин сәбәби онлара тә'сир әдән маенин молекулаларыдыр. Бу молекулалар лап чохдур вә онлар гармагарышыг һәрәкәт әдирләр. Бу һәрәкәтин нәтичәсиндә молекулалар мүхтәлиф шәкилдә һиссәчикләрә тохунур вә бу заман онлары һәрәкәтә кәтирир. Молекулаларын өзләрини вә һәрәкәтини микроскоп васитәсилә көрмәк олмур. Чүнки молекулалар чох кичик олдуғундан микроскопун бөйүтмә күчү чатмыр. Лакин маеә харичдән атылмыш һиссәчикләр микроскопла мүшаһидә әтмәк олар. Бу һадисәйә Броун һәрәкәти дейилир.

Айдыңдыр ки, микроскоп алтында бир бахышла нечә һиссәчийин көрүнәчәйини әввәлдән демәк олмаз. Исвеч физики Сведеберг гызылын кичик һиссәчикләрини 518 дәфә суда мүшаһидә әтмишдир. Нәтичәдә тапмышдыр ки, 112 мүшаһидәдә һеч бир һиссәчик көрүлмәмишдир;

1 һиссәчик 168 дәфә, 2 һиссәчик 130 дәфә, 3 һиссәчик 69 дәфә, 4 һиссәчик 12 дәфә, 5 һиссәчик 5 дәфә, 6 һиссәчик 1 дәфә, 7 һиссәчик 1 дәфә мүшаһидә олунмушдур.

Инди биз мүшаһидә олунан һиссәчикләрин нисби сайыны тапаг:

0	Һиссәчик:	$\frac{112}{518} \approx 0,216$
1	"	$\frac{168}{518} \approx 0,325$
2	"	$\frac{130}{518} \approx 0,251$
3	"	$\frac{69}{518} \approx 0,133$
4	"	$\frac{32}{518} \approx 0,062$
5	"	$\frac{5}{518} \approx 0,010$
6	"	$\frac{1}{518} \approx 0,002$
7	"	$\frac{1}{518} \approx 0,002$

Әкәр биз тәчрүбәни 518 дәфә дейил, бир аз да чох апарсаг бу кәсирләрин сурәтләри вә мәхрәчләри дәйишмиш олур, лакин нисбәтләр демәк олар ки, дәйишмәмиш галыр.

Демәк тәсадүфи һадисәләрдә дә өзүнә мәхсус мүәййән гануниййәт вардыр: тәчрүбәләрин сайыны артырсаг һәр тәсадүфи һадисәнин әмәлә кәлмәси миғдарынын үмуми тәчрүбәләр сайына олан нисбәти демәк олар ки, сабитдир. Бу сабит нисбәтә *әнтимал* дейилир.

Демәк һиссәчикләрин мүшаһидә олунмамасынын әнтималы 0,216, бир дәнә һиссәчийин мүшаһидә олунмасы әнтималы 0,325 вә и. а., нәһайәт 7 һиссәчийин мүшаһидә олунмасы әнтималы 0,002—дир.

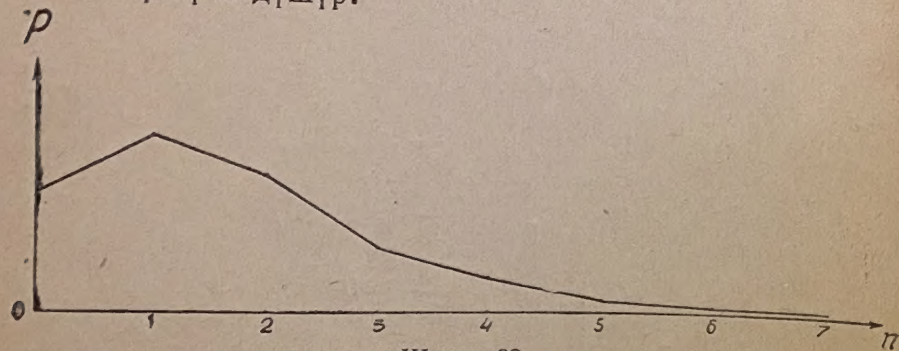
Бу белә дүшүнүлмәлидир: әкәр мүшаһидә чох апарыларса онун тәҗрибән 0,216 һиссәсиндә һиссәчикләр көрүлмәйәчәкдир, 0,325 һиссәсиндә 1 һиссәчик көрүләчәк вә и. а.

Бурадан көрүрүк ки, тәсадүфи һадисәләрдә дә мүәййән гануниййәт вардыр. Һәр тәсадүфи һадисәнин әмәлә кәлмәсинин мүәййән әнтималы вардыр.

Тәсадүфи һадисәләрин әнтималларыны өйрәнән әлмә *әнтимал нәзәриййәси* дейилир.

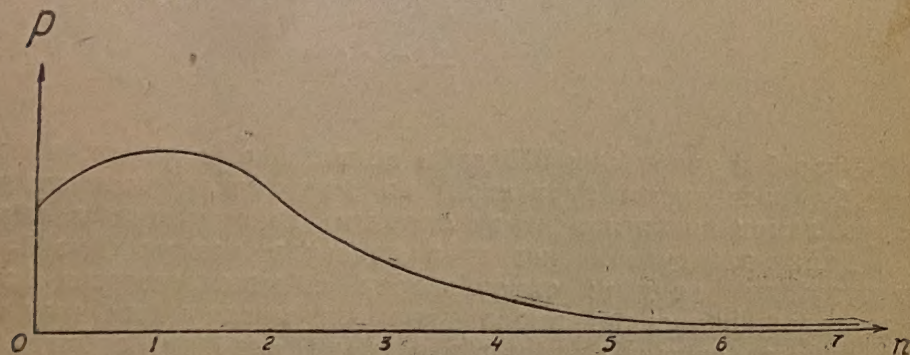
тасадүфи һадисәләр һәм тәчрүби, һәм дә нәзәри өйрә-
нир.

Юхарида данышдығымыз кичик һиссәчикләрин маедә
пайланмасы һаггындакы мәсәләни нәзәри олараг өйрәнән
XX әсрин бөйүк алыми Эйнштейн олмушдур. Оун алдыгы
нәзәри нәтичәләрлә Сведеберин тәчрүби нәтичәләри бир-
биринин үстүнә дүшүр.



Шәкил 32

Тәчрүби вә нәзәри хәтләр 32 вә 33-чу шәкилләрдә көстә-
рилмишдир.



Шәкил 33

Эһтимал мәсәләси илк дәфә гумар оюнлары илә әләгә-
дар олараг мейдана чыхмышдыр. Белә мәсәләләри биринчи
дәфә олараг XVII әсрдә элми сурәтдә өйрәнмәйә башла-
мышлар. Исвечрә алыми Яков Бернулли (1654—1705) бу
саһәдә бир чох мәсәләләр һәлл этмишдир. О, бу мәсәләләрин
һәллиндә сонсуз кичиләнләр анализинин методларыны ишләт-
мишдир.

Эһтимал нәзәрийәси элмини мүхтәлиф саһәләрдә ишлә-
дән бөйүк алман алыми Гаусс (1777—1855) олмушдур.

Сонралары эһтимал нәзәрийәси бөйүк рус алимләри
П. Л. Чебышев (1821—1894), А. А. Марков (1856—1922)
тәрәфиндән инкишаф этдирилмишдир.

Эһтимал нәзәрийәсини дәгиг элм шәклинә салан, элмин
вә техниканын мүхтәлиф саһәләриндә тәтбиг әдән Совет
алимләри олмушдур. Бу саһәдә акад. А. Н. Колмогоровун,
акад. С. Н. Бернштейнин элми ишләрини хүсуси гейд
әтмәк олар.

15. РИЯЗИЙЯТЫН ХАРАКТЕРИК ЧӨНӨТЛӘРИ ВӘ МАНИЙӘТИ

Һәр бир элм һаггында мүййән тәсәввүр яратмаг үчүн
онун айры-айры һиссәләрини билмәкдән башга, о элмә
үмуми нәзәр етириб, онун маһийәтини вә характерик чө-
һәтләрини өйрәнмәк лазымдыр.

Риязийят инсанын тәчрүби фәәлийәтиндән доғур, ондан
мүвәггәти айрылыб, мүчәррәд инкишаф әдир, енә дә тәтбиг
олунмаг үчүн кери, инсан тәчрүбәсинә гайыдыр, бу нөв
инкишаф әдир вә инсанын мәдәнийәтини вә тәбиәтин гүввә-
ләрини даһа файдалы истифадә әтмәк ишини инкишаф
әтдирир.

Риязийятын характерик чөһәтләри бунлардыр: илк әввәл
мүчәррәдлик, икинчи дәгиглик, мәнтиги чиддилик, метод-
ларынын үмумилийи вә нәһайәт, тәтбиг олунмасынын сон
дәрәчә кеңиш олмасы.

Мүчәррәдлик садәчә сай просесиндә белә әмәлә кәлир.
Биз мүчәррәд әдәдләри конкрет чисимләрлә бағламырыг,
ялныз өйрәнирик.

Әләчә дә һәндәсәдә биз, мәсәлән, дүз хәтдән данышан-
да, артыг она дартылмыш сап кими бахмырыг, биз мүчәр-
рәд олараг дейирик дүз хәтт ялныз бир өлчүсү олан һән-
дәси образдыр.

Белә мүчәррәдлик риязийятын һәр һиссәсиндә вардыр.
Әдәд вә һәндәси фигуралар биринчи аңлайышлардыр. Сон-
ралар исә функциялар, ени фәзалар, чох өлчүлү фәзалар
вә и. а. кими башга мүчәррәд аңлайышлар алыныр.

Дикәр тәрәфдән дә риязийят аңчаг мүчәррәд аңлайыш-
ларын йығымы дейилдир. Риязийят аңлайышлары доғулдуғу
конкрет әләмлә бағлыдыр.

Риязийятын нәинки аңлайышлары, методлары да мүчәр-
рәддир. О, исбат әтдикләрини дә мүчәррәд, тәфәккүрлә,
һесабламаларла ичра әдир.

Риязийят мүтләг дейилдир. Риязийят да башга элмләр
кими инкишаф әдир.

Тәбиәт вә чәмийәтдәки һадисәләр чүрбәчүр, бир-бирин-
дән фәргли вә бәзән чох фәрглидир. Мәсәлән, электрик
һадисәләри илә нефтин мәсәмәтли мүнһидә сүзүлмәси башга-
башга һадисәләрдир. Лакин онлар мүййән шәраитдә әйни

риязи мәсәлә илә әләгәдардыр. Бу исә риязийятын үмуми-лийини көстәрир.

Нәһайәт, риязийятын кениш тәтбиг олунамасы да онун характерик чәһәтләриндәндир.

Ән әввәл биз һәр заман истеһсалатда, һәятда, ичтимаий-йәтдә риязийятын аңлайышларындан вә нәтичәләриндән истифадә эдирик: мүййән саһәйә сәрф олунаң пулу һесабладыгда әдәлләри, һесаб әмәлләрини, отағын саһәсини һесабладыгда һәндәсәни ишләдирик. Доғрудур, бу ишләдилән аңлайышлар вә нәтичәләр чох садәдирләр, лакин бунлар риязийятын илк яраныш дөврүндә ән йүксәк наилийәтләрдән һесаб олуноурдулар.

Икинчи риязийятсыз мүасир техника мүмкүн олмазды. Тәйярәчиликдә, иншаат ишләриндә, кәми иншаатында бир сөzlә мүасир техниканын әлә саһәси йохдур ки, орада риязийят сон дәрәчә лазым олмасын. Онларын һамысы мүасир риязийятын дәрин нәтичәләринә әсасланыр.

Нәһайәт, әлмләрин һамысы риязийятдан истифадә эдирләр. „Дәгиг әлмләр“—механика, астрономия, физика, әлчә дә кимя, риязи апаратдан истифадә әдәрәк өз нәзәриййәләрини ярадыр вә инкишаф әтдириләр. Риязийятсыз бу әлмләрин прогресси, инкишафы мүмкүн дейилдир.

Риязийятын дәгиг әлмләрдә вә техникадакы сон дәрәчә парлаг тәтбигләриндән бә’зи нүмунәләр кәтирәк.

Күнәш системиндәки ән узаг планета олан Нептун 1846-чы илдә риязи һесабламаларын нәтичәсиндә тапылмышдыр. О вахт ахырынчы һесаб олунаң планетанын—Уранын һәрәкәтиндәки дүзкүнсүзлүйү тәһлил әдән франсыз астроному Левер’е белә бир нәтичәйә кәлди ки, бу дүзкүнсүзлүйү һәлә мә’лум олмаян башга планетанын чәзби ярадыр. Левер’е механиканын ганунларына әсасланараг һесабламалар апарыб намә’лум планетанын ерини тә’йин әтди. О вахт күчлү телескоплары олан алманиядакы Галле шәһәринә Левер’енин һесабламаларла тә’йин әтдийи планетанын ерини хәбәр вердиләр. Бу һесабламалара көрә телескопу истигамәтләндириб намә’лум олан планетаны тапдылар вә онун адыны Нептун гойдулар. Бу кәшф тәк механика вә астрономиянын, хүсусән Коперник системинин галибиййәти дейил иди, о, риязи һесабламаларын да галибиййәти иди.

Икинчи бир мисал көтүрәк. Инкилис физики Максвелл электромагнит һадисәләрини мүййән дифференциал тәнликләrlә ифадә әтди. Максвелл бу тәнликләrlә әсасланараг апардығы сырф риязи тәдгигат нәтичәсиндә электромагнит далғаларынын арлығы вә онларын ишыг сүр’әтилә һәрәкәт әтмәләри һагда өз фикрини сөйләди. Бу нәтичәйә әсасланараг бир аз сонра алман алыми Герс тәчрүби олараг бу

далғалары тапды. Бөйүк рус алыми А. С. Попов бу далғалардан истифадә әдәрәк индики радио-техниканын әсасыны гойду.

Бурада көрүрүк ки, илк дәфә elektrik чәрәяны тәрәфиндән магнит ибрәсинин тәрпәнмәсиндән башлаяраг әлм һадисәнин нәзәриййәсинә кечир, о һадисәнин риязи тәдгигини апарыр вә бурадан доған ени нәтичәләр тәчрүбәйә гайыдыр, радио-техниканы ярадыр, радио-техника исә ени мәсәләләр, о чүмләдән дә сырф риязи һәлл олуна билән проблемләр орталыға чыхарыр, нәзәриййәни бир даһа инкишаф әтдириләр.

Бу кими мисаллар чох кәтирмәк олар. Биз юхарыдакы мисалларла кифайәтләнирик.

Риязийят да башга әлмләр кими сосялист вәтәнимиздә апарылан коммунизм гуручулуғу ишләрилә әләгәдар олараг тарихдә мисли көрүлмәмиш дәрәчәдә инкишаф эдир. Чох мигдарда һазырланмыш совет риязийятчылары ордусу Совет әлминин вә техникасынын инкишафы үчүн бөйүк наилийәтләр әлдә әтмишләр вә кәлчәкдә даһа да чох әдәчәкләр.

Совет Азәрбайҗанында да риязийят әлмләри саһәсиндә бир чох мүвәффәгиййәтләр вардыр. Бу мүвәффәгиййәтләр хүсусән дифференциал вә интеграл тәнликләри, функциялар нәзәриййәси вә ени һәндәсәләр саһәсиндәдир. Риязи әлмләр саһәсиндә әлми тәдгигат ишләри Азәрбайҗан ССР Әлмләр Академиясынын физика вә риязийят институтунда вә Али мәктәбләрин риязи кафедраларында апарылар. Риязийят әлмләри республикамызда күндән-күнә чичәкләнир вә кәнч риязийятчыларын сыралары мөһкәмләнир.

КИТАБЫН ИЧИНДӘКИЛӘР

Илк риязи анлайышлар	5
Әдәд анлайышынын инкишафы	11
Әдәдләр нәзәрийәси	14
Тәнликләр	15
Бүтөвә көрә һиссәни, һиссәйә көрә бүтөвү тәйин этмәк	20
Сонсуз кичиләнләр анализи	25
Дифференциал вә интеграл тәнликләр	27
Сонсуз чәмләр һаггында	29
Максимум вә минимум һаггындакы мәсәләләр	32
Бөйүк һесабламалар	34
Аналитик һәндәсә	40
Ени һәндәсәләр	43
Чевирмәләр методу	45
Тәсадүфи һадисәләр. Эһтимал нәзәрийәси	46
Риязийятын характерик чәһәтләри вә маһийәти	49

Редактору һ. Н. Ағаев. Рәссамы Ф. Гулиевдир.
Техн. редактору В. Гаврилова. Корректору Т. Бағырова.

Йыгылмаға верилмиш 20/IX-1954-чүдиз. Чапа һимзаланмыш 16/III-1955-чи ил.
Форматы $60 \times 92 \frac{1}{16} - 1,625 = 3,25$ чап вәрәги. (Уч. нәшр. вәрәги 3,5).
Тиражы 5000. ФГ 00225. Сифариш 346. Бақы, Фиолетов күчәси, 8.
Гиймәти 1 ман. 10 гәп.

Азәрбайжан ССР Мәдәнийәт Назирлиинин „Гызыл Шәрг“ мәтбәәси.
Бақы, Һәзи Асланов күчәси, 80.